



Florian Bittner (Autor)

# Modellgestützte multikriterielle Optimierung von permanenterregten Synchronmaschinen für Hybrid- und Elektrofahrzeuge



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/8807>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen, Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: [info@cuvillier.de](mailto:info@cuvillier.de), Website: <https://cuvillier.de>

# 1 Einleitung

Aus Gründen des Umweltschutzes und um die zunehmend härteren Gesetzesanforderungen bezüglich der Schadstoffemission von Kraftfahrzeugen erfüllen zu können, setzen die meisten Automobilhersteller neben dem Leichtbau und der Verbesserung des Verbrennungsmotors auf die Elektrifizierung des Antriebs. Zusätzlich ist diese Entscheidung durch den Imagegewinn für das Unternehmen und im Falle des Elektrofahrzeugs durch eine Reduzierung der Komplexität motiviert. Die Kunden profitieren dabei von einem geringeren oder gar auf null reduzierten Kraftstoffverbrauch, sie müssen beim Erwerb des Fahrzeugs aufgrund der zum Teil kostenintensiven Komponenten jedoch meist einen höheren Kaufpreis bezahlen.

## Überblick über die Fahrzeugvarianten

Im Zuge der Elektrifizierung wird der Antriebsstrang eines konventionellen Verbrenner-Fahrzeugs mit einem elektrischen Antrieb kombiniert, das Ergebnis ist ein Hybridfahrzeug. Wird auf die Verbrennungskraftmaschine komplett verzichtet und das Fahrzeug ausschließlich mit einer elektrischen Maschine bewegt, so spricht man von einem Elektrofahrzeug. In den letzten Jahren wurde eine Vielzahl unterschiedlicher Hybridkonzepte entwickelt, welche sich in die Kategorien serieller, paralleler und leistungsverzweigter Hybrid einordnen lassen [42], wobei auch Kombinationen davon möglich sind. Exemplarisch ist in Abbildung 1.1 der Antriebsstrang eines parallelen Hybridfahrzeugs dargestellt, bei welchem das Drehmoment der Verbrennungskraftmaschine und das Drehmoment der elektrischen Maschine über das eingezeichnete Getriebe auf die Räder übertragen werden. Gegenüber einem konventionellen Fahrzeug sind neben der elektrischen Maschine zusätzlich ein Energiespeicher, beispielsweise in Form einer sogenannten „Hochvolt-Batterie“, und eine Leistungselektronik vorhanden. Die Leistungselektronik beinhaltet einen Pulswechselrichter und dient zur Ansteuerung der elektrischen Maschine.

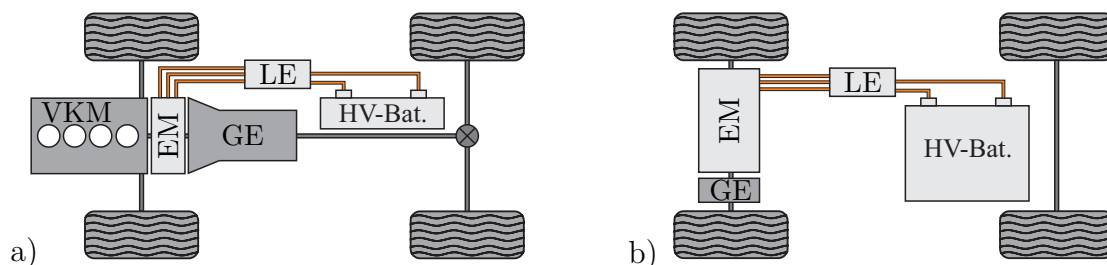


Abbildung 1.1: Antriebsstrang eines a) Hybridfahrzeugs und b) eines Elektrofahrzeugs (VKM: Verbrennungskraftmaschine, EM: elektrische Maschine, GE: Getriebe, LE: Leistungselektronik, HV-Batt: Hochvolt-Batterie)

Da Batterie-Elektrofahrzeuge ihre Energie ausschließlich aus der Hochvolt-Batterie beziehen, muss diese, wie in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt, eine entsprechend



höhere Kapazität aufweisen. Bei Elektrofahrzeugen ist die Anzahl der mechanischen Komponenten deutlich kleiner als bei Fahrzeugen mit konventionellem Antrieb oder einem Hybridantrieb. Je nach Antriebskonzept genügt es unter Umständen, das Getriebe mit nur einer Übersetzung auszuführen oder bei einem Direktantrieb komplett entfallen zu lassen.

### Typen elektrischer Maschinen im elektrifizierten Antriebsstrang

Unabhängig vom gewählten Hybridkonzept oder der Art der Energiespeicherung sind in elektrifizierten Fahrzeugen stets elektrische Maschinen im Antrieb vorhanden. Die Anforderungen an die Maschine und der zur Verfügung stehende Bauraum variieren je nach Antriebskonzept und Leistungsklasse des Fahrzeugs stark voneinander. In der Literatur wurde bereits eine Vielzahl von Maschinentypen für den Einsatz in Kraftfahrzeugen untersucht [37, 33, 65, 93], in den käuflich erwerbbaaren Serien-Fahrzeugen werden vorrangig drei Typen von Drehfeldmaschinen eingesetzt, zum Beispiel [10]:

- Der US-Amerikanische Elektrofahrzeughersteller *Tesla Motors* setzt in seinen beiden Modellen *Roadster* und *Model S* Asynchronmaschinen (ASM) mit Kurzschlusskäfig ein [83]. Im kleinen Stadtfahrzeug *Renault Twizy* arbeitet ebenfalls eine ASM.
- In der Kompaktlimousine *Renault ZOE* kommt eine fremderregte Synchronmaschine (FSM) zum Einsatz [15].
- Der Großteil der auf dem Markt erhältlichen Hybridfahrzeuge wird mit permanenterregten Synchronmaschinen ausgestattet. Der wohl bekannteste Vertreter ist der *Toyota Prius*, der als leistungsverzweigter Hybrid zwei Maschinen dieser Art beinhaltet. Auch die deutschen Hersteller bieten aktuell ausschließlich Fahrzeuge mit permanenterregten Synchronmaschinen an, so z. B. der *Audi Q5 Hybrid*, das Elektrofahrzeug *i3* von *BMW i* und der *Mercedes-Benz E300 Hybrid*.

**Asynchronmaschinen** mit Kurzschlusskäfig zeichnen sich durch ihren robusten Aufbau und moderate Herstellungskosten aus, aufgrund der langjährigen Weiterentwicklung gilt dieser Maschinentyp als technisch ausgereift. Um Drehmoment bilden zu können, muss in den kurzgeschlossenen Rotorstäben ein Strom fließen, welcher im Rotor z. T. hohe Verluste erzeugt und daher vor allem bei niedrigen Drehzahlen zu einer Verschlechterung des Wirkungsgrades führt. Ein Nachteil der ASM ist die reziprok mit der Drehzahl abfallende Leistungskurve, nachdem der Betriebspunkt maximaler mechanischer Leistung überschritten ist.

Bei **fremderregten Synchronmaschinen** wird das Feld des Rotors durch zusätzliche Erregerspulen gebildet. Als technisch anspruchsvoll kann hierbei die Energieübertragung vom Stator auf den Rotor gesehen werden. Aktuell in Serie sind Systeme mit Schleifringen [37], Entwicklungsarbeiten gehen in Richtung berührungslose, induktive Übertragung [45]. Mit dem Erregerstrom ergibt sich ein zusätzlicher Freiheitsgrad in der Regelung der Maschine, was einen hohen Leistungsfaktor  $\cos \varphi$  und nahezu konstante Leistung bei hohen Drehzahlen ermöglicht.

Abweichend von den beiden bereits vorgestellten Maschinentypen muss bei **permanenterregten Synchronmaschinen** keine zusätzliche Energie zur Erregung des Rotors bereitgestellt werden. Stattdessen wird der Rotor mit Permanentmagneten bestückt, was in weiten Betriebsbereichen zu einem guten Wirkungsgrad führt. Als weitere

Vorteile können eine hohe Drehmoment- und Leistungsdichte genannt werden, welche im Vergleich zu den anderen beiden Maschinentypen im Dauerbetrieb weniger stark abnehmen. Im kurzzeitigen Überlastbetrieb sind Leistungsdichten bis ca.  $35 \frac{\text{kW}}{\text{l}}$  (bezogen auf das Volumen der Aktivteile) möglich, die Drehmomentdichte kann bis ca.  $130 \frac{\text{Nm}}{\text{l}}$  betragen. Daher sind permanenterregte Synchronmaschinen bei dem in Hybridfahrzeugen meist stark begrenzten Bauraum häufig die erste Wahl.

### Permanentmagnete auf Basis der Seltenen Erden

Ein großer Nachteil von permanenterregten Synchronmaschinen ist nicht technischer, sondern ökonomischer Natur: die Kosten für das Magnetmaterial, welche bis zu 30 % der gesamten Kosten für die Maschine ausmachen. Insbesondere die im Kraftfahrzeug z. T. hohen Umgebungstemperaturen erfordern den Einsatz von Magnetsorten mit guter Temperaturbeständigkeit bei gleichzeitig hoher Energiedichte. Hierfür sind Selten-Erd-Magnete geeignet, die entweder aus einer Samarium-Kobalt-Legierung (SmCo) bestehen oder auf einer Neodym-Eisen-Bor-Legierung (NdFeB) basieren. Bei letzterer setzt sich der Magnet aus ca. 65 % Eisen und 30 % Neodym (Nd) zusammen, je nach Temperaturanforderung wird dieses teilweise durch die schweren Selten-Erd-Metalle Dysprosium (Dy) oder Terbium (Tb) ersetzt bzw. um diese ergänzt. Wie aus Abbildung 1.2 hervorgeht, liegen die Rohstoffpreise für die relevanten schweren Seltenen Erden deutlich über denen der leichten Seltenen Erden Samarium und Neodym. Außerdem unterliegen die Preise starken Schwankungen, welche sich letztendlich auf die Kosten für die elektrische Maschine auswirken.

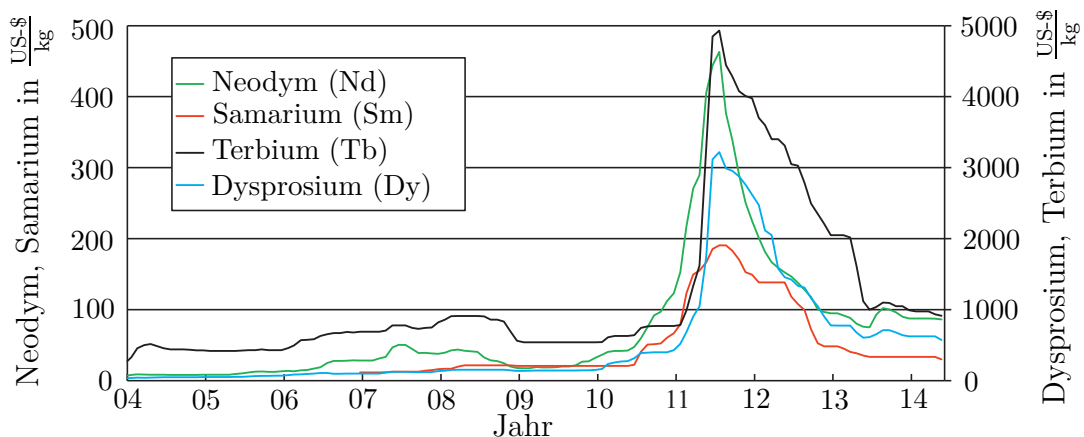


Abbildung 1.2: Entwicklung der Rohstoffpreise für Selten-Erd-Metalle seit Januar 2004 (FOB-Preise (Free-On-Board), d. h. Kaufpreis außerhalb Chinas inkl. Zoll- und Nebenabgaben. Quelle: Shin-Etsu Magnetics Europe GmbH)

Die hohen Preise der Seltenen Erden (SE) und deren zum Teil enormen Schwankungen resultieren aus mehreren Faktoren [28]:

- Die Preise für SE werden zwischen den Anbietern und dem Kunden ausgehandelt, einen Börsenhandel wie bei anderen Rohstoffen gibt es nicht.
- Viele der SE kommen nicht selten in der Erdkruste vor. Allerdings sind sie nur selten in wirtschaftlich abbaubarer Menge vorhanden. Laut Prognosen reichen die Reserven weniger als 50 Jahre [39].



- Die schweren SE sind in den meisten SE-Lagerstätten nur in sehr geringer Konzentration vorhanden.
- Der Großteil der wirtschaftlich relevanten Lagerstätten liegt in China. Dadurch ergibt sich eine Quasi-Monopolstellung der chinesischen Produzenten.
- Durch künstliche Verknappung des Angebots der chinesischen Produzenten und Spekulationen auf dem SE-Markt kam es Mitte 2011 zu einem starken Anstieg der SE-Preise.

Um die Kosten für die Magnete gering zu halten, muss vor allem der Anteil an schweren SE minimiert werden.

Trotz ihrer höheren Kosten werden permanenterregte Synchronmaschinen wegen ihrer kompakten Bauweise in Hybridfahrzeugen und aufgrund ihres guten Wirkungsgrades in Elektrofahrzeuge eingebaut. Bei Batterie-Elektrofahrzeugen muss ein schlechterer Wirkungsgrad der elektrischen Maschine bei einer festen, geforderten Fahrzeugreichweite durch zusätzliche Batteriekapazität erkauft werden. Vor allem zwischen den Maschinentypen ASM und PSM wurden für die Anwendung als Traktionsantrieb schon mehrere Vergleiche durchgeführt [14, 33, 32, 65, 93], wobei keine als klarer Sieger hervorging. Die Eignung des jeweiligen Maschinentyps hängt vielmehr von den spezifischen Anforderungen des Fahrzeugkonzepts und dem vorrangigen Nutzungsverhalten ab.

### **Inhalt und Aufbau der Arbeit**

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich permanenterregte Synchronmaschinen betrachtet. Um den Kostennachteil so gering wie möglich zu halten, wird bei der Auslegung der Maschine auf einen sparsamen Einsatz des Magnetmaterials geachtet. Dass es sich hierbei um keine einfache Aufgabe handelt, soll mit der Abbildung 1.3 veranschaulicht werden. Bei der Auslegung elektrischer Maschinen stehen dem Entwickler zahlreiche Parameter zur Verfügung, wie beispielsweise die Maschinenparameter Polpaarzahl und Nutenzahl sowie die meisten geometrischen Abmessungen. Demgegenüber stehen insbesondere bei Hybridfahrzeugen ein stark beschränkter Bauraum und fest vorgegebene elektrische Größen, resultierend aus der installierten Batterie und der Leistungselektronik.

Meist gilt es, die Maschine nicht nur bezüglich einer, sondern auf mehrere Zielgrößen hin gleichzeitig zu optimieren. Diese Ziele sind häufig gegenläufig, so soll beispielsweise bei vorgegebenem Bauraum ein bestimmtes oder möglichst hohes Drehmoment bzw. eine hohe Leistung mit möglichst geringer Magnetmasse erreicht werden. Bei permanenterregten Synchronmaschinen mit vergrabenen Magneten, wie sie in der vorliegenden Arbeit untersucht werden, empfiehlt sich zur Ermittlung der Zielgrößen, also der gewünschten Eigenschaften eines Maschinendesigns (das ist ein konkreter Blechschnitt), die Durchführung numerischer Feldberechnungen. Derartige Berechnungen sind gegenüber analytischen Methoden deutlich rechenzeitintensiver, liefern dafür jedoch genauere Ergebnisse.

Um möglichst wenige dieser rechenzeitintensiven Funktionsauswertungen durchführen zu müssen und damit innerhalb akzeptabler Gesamtrechenzeit möglichst gute Lösungen für ein gegebenes Optimierungsproblem zu finden, wird ein neuartiges Optimierungsverfahren entwickelt. Mit der *Kriging-gestützten multikriteriellen Partikelschwarmoptimierung* (KG-MPSO) lässt sich das Design von permanenterregten Synchronmaschinen



Abbildung 1.3: Herausforderungen bei der Auslegung elektrischer Maschinen für Hybrid- und Elektrofahrzeuge

bei einer reduzierten Anzahl an Funktionsauswertung bezüglich mehrerer Zielgrößen optimieren. Die Besonderheit des Verfahrens ist die Kombination einer als Basisalgorithmus dienenden multikriteriellen Partikelschwarmoptimierung mit einem Kriging-Modell, welches zur Interpolation zwischen bereits berechneten Lösungen verwendet wird. Damit können neue Lösungskandidaten vorab bewertet und die Suche auf erfolgsversprechende Kandidaten konzentriert werden. Darüber hinaus kann direkt auf dem analytischen Kriging-Modell mit geringem Rechenzeitbedarf nach guten Lösungen gesucht werden.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Themenschwerpunkte: die Entwicklung eines neuen Optimierungsverfahrens und die Anwendung dieses Verfahrens bei der Auslegung und Optimierung von permanenterregten Synchronmaschinen für ein gegebenes Antriebskonzept.

Zu Beginn werden die Grundlagen der multikriteriellen Optimierung und das Vorgehen anderer Autoren bei der Optimierung elektrischer Maschinen sowie weiterer, rechenzeitintensiver Fragestellungen vorgestellt. Inspiriert durch die erfolgreiche Umsetzung in anderen Disziplinen werden Aspekte von bestehenden Verfahren übernommen und um die neue Komponente des *Spawnings* erweitert. Das neu entwickelte Optimierungsverfahren KG-MPSO wird in Kapitel 3 beschrieben und mit Hilfe dreier akademischer Problemstellungen getestet.

Anschließend wird im Kapitel 4 auf das Betriebsverhalten und die wichtigsten Werkstoffe von permanenterregten Synchronmaschinen eingegangen. Dort werden neben dem zur Regelung meist verwendeten dq-Modell auch die Verlustmechanismen vorgestellt. Außerdem werden die für den Verlauf der Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie vorrangig relevanten Einflussgrößen betrachtet und deren Auswirkung untersucht.

In Kapitel 5 werden das Vorgehen und die Ergebnisse der Optimierung unterschiedlicher permanenterregter Synchronmaschinen gezeigt. Aus den möglichen Kombination von vier Rotorvarianten, unterschiedlichen Wicklungsarten und diversen Polpaarzahlen



werden zwölf Maschinenvarianten derart ausgewählt, dass ein direkter Vergleich zwischen den aufgeführten Variationsumfängen bei sonst konstanten Ausprägungen möglich ist. Diese Maschinenvarianten werden hinsichtlich mehrerer Zielgrößen bei identischen Randbedingungen optimiert. Die vier in Frage kommenden Maschinenvarianten werden miteinander verglichen und schlussendlich das am besten geeignete Maschinendesign ausgewählt. Neben einer möglichst guten Erfüllung der Ziele bei gleichzeitiger Einhaltung der Nebenbedingungen wird hierfür weiterhin der Verbrauch der unterschiedlichen Maschinen im Neuen Europäischen Fahrzyklus betrachtet.

Das ausgewählte Design wird ausführlich untersucht und in leicht modifizierter Form als Prototyp aufgebaut. In Kapitel 6 werden weiterhin das Vorgehen zur Verbesserung der mechanischen Rotorfestigkeit erklärt und der Vergleich zwischen den berechneten und den gemessenen Ergebnissen durchgeführt.

Abschließend werden die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und weitere Forschungsgebiete aufgezeigt.



## 2 Optimierung rechenzeitintensiver Fragestellungen

Technische Fragestellungen können analytisch häufig nicht ausreichend genau beschrieben werden. Statt analytischer Modelle werden für derartige Aufgaben rechenzeitintensive numerische Berechnungsmethoden eingesetzt. Neben den in dieser Dissertation behandelten permanenterregten Synchronmaschinen können als weitere Beispiele die aeroakustischen Strömungssimulationen von Fahrzeugen, Crashsimulationen und thermodynamische Berechnungen von Verbrennungskraftmaschinen genannt werden. Die Bestimmung eines Gradienten, wie es für einige der deterministischen Methoden notwendig ist, kann bei der Optimierung rechenzeitintensiver Fragestellungen mit mehreren Parametern nur unter immensum Rechenaufwand bewerkstelligt werden. Anstelle der deterministischen Verfahren werden daher meist stochastische Optimierungsverfahren verwendet. In diesem Kapitel werden zuerst die Grundlagen der multikriteriellen Optimierung vorgestellt. Anschließend werden das Vorgehen anderer Autoren bei der Optimierung elektrischer Maschinen und aus der Literatur bekannte Methoden zur Reduzierung der Gesamtrechenzeit geschildert.

### 2.1 Grundlagen der multikriteriellen Optimierung

Bei multikriterieller Optimierung, auch Mehrzieloptimierung oder Pareto-Optimierung genannt, werden Parametervektoren  $\vec{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$  gesucht, welche mehrere Zielfunktionen  $\vec{f}(\vec{x}) \in F \subset \mathbb{R}^m$  gleichzeitig minimieren. Mathematisch lässt sich dies wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \min \vec{y} &= \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))^T \\ \text{mit} \quad \vec{g}(\vec{x}) &= (g_1(\vec{x}), \dots, g_{n_k}(\vec{x}))^T \leq \vec{0} \\ \vec{x}_u &\leq \vec{x} \leq \vec{x}_o \\ \vec{y} &= (y_1, \dots, y_m)^T \in F \subset \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &= (x_1, \dots, x_n)^T \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sollen eine oder mehrere Zielfunktionen maximiert werden, erreicht man dies durch die Multiplikation der entsprechenden Zielfunktion mit dem Faktor  $-1$ . Mittels des Zielfunktionsvektors wird der  $n$ -dimensionale Parameterraum  $X$  in den  $m$ -dimensionalen Zielfunktionsraum  $F$  abgebildet. Bei Optimierungsaufgaben mit technischem Hintergrund können die Parameter meist nur innerhalb gewisser Schranken variiert werden,



was durch die Untergrenze  $\vec{x}_u$  und die Obergrenze  $\vec{x}_o$  festgelegt wird. Außerdem wird der zulässige Parameterraum  $X$  durch  $n_k$  Restriktionsfunktionen  $g(\vec{x})$  weiter eingeschränkt. Als Restriktionen sollen in dieser Arbeit Funktionen bezeichnet werden, die explizit den Parameterraum einschränken, z. B. in der Form  $x_1 + 2x_2 \leq 0$ . Nebenbedingungen haben den Charakter einer Zielgröße und können meist nicht direkt in Abhängigkeit des Parametervektors angegeben werden, in der Problemformulierung (2.1) treten sie jedoch ebenfalls als Restriktionsfunktionen in Erscheinung.

Im Kontext der Optimierung elektrischer Maschinen sind z. B. der Bohrungsdurchmesser und die Magnethöhe Parameter. Ein vollständiger Parametervektor spiegelt ein konkretes Maschinendesign (einen Blechschnitt) wider. Zielgrößen sind beispielsweise ein möglichst hohes Drehmoment und minimale Magnetmasse. Als Restriktion kann der maximale Winkel zwischen V-förmig angeordneten Magneten in Abhängigkeit von deren Breite genannt werden. Die Forderung nach einer maximalen Flussdichte im Joch von kleiner 1,8 T wäre eine Nebenbedingung.

Während bei Optimierungsaufgaben mit nur einer Zielgröße der beste Funktionswert immer eindeutig angegeben werden kann, ist dies bei Mehrzieloptimierungen nicht möglich. Anschaulich kann dies an einem einfachen Beispiel mit einem Parameter und zwei Zielfunktionen erläutert werden. Das Optimierungsproblem lautet

$$\min \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, 2x + 6 \\ 0, 4x^3 - 3x^2 + 6, 5x \end{pmatrix} \quad x \in X = [0; 5]. \quad (2.2)$$

Wie anhand von Abbildung 2.1 a) erkennbar ist, treten die Minima der beiden Zielfunktionen bei unterschiedlichen Werten des Parameters  $x$  auf, d. h. es gibt kein  $x^* \in X$ , für welches beide Zielfunktionen gleichzeitig minimal werden. Dieses Verhalten ist typisch für multikriterielle Optimierungsprobleme mit meist gegenläufigen Zielgrößen. Der daraus resultierende Zielkonflikt erlaubt nur Kompromisslösungen, wie sie in Abbildung 2.1 b) im Zielfunktionsraum  $F \subset \mathbb{R}^2$  hervorgehoben dargestellt sind. Für zunehmende Werte von  $x$  wird diese Kurve vom Zielfunktionsvektor  $\vec{y}_1$  aus in Richtung  $\vec{y}_4$  durchlaufen. In den Teilabschnitten  $[\vec{y}_1; \vec{y}_2]$  und  $[\vec{y}_3; \vec{y}_4]$  befinden sich die Pareto-optimalen Lösungen. Die Ergebnisse im Bereich  $]\vec{y}_2; \vec{y}_3[$  werden als dominierte Lösungen bezeichnet, da es mindestens einen Zielfunktionsvektor gibt (hier  $\vec{y}_3$ ), der in beiden Komponenten besser ist, d. h. niedrigere Werte annimmt. Die nachfolgenden Definitionen sind in Anlehnung an [59] formuliert.

### Definition 1. *Dominanz*

Ein Parametervektor  $\vec{x}_1 \in X$  **dominiert** einen anderen Parametervektor  $\vec{x}_2 \in X$  wenn gilt:

1. Der Parametervektor  $\vec{x}_1$  ist in allen Zielgrößen nicht schlechter als der Parametervektor  $\vec{x}_2$ :

$$f_i(\vec{x}_1) \leq f_i(\vec{x}_2) \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

2. Der Parametervektor  $\vec{x}_1$  ist in mindestens einer Zielgröße besser als der Parametervektor  $\vec{x}_2$ :

$$f_i(\vec{x}_1) < f_i(\vec{x}_2) \quad \text{für mindestens ein } i = 1, \dots, m.$$

Zwei Parametervektoren  $\vec{x}_1 \in X$  und  $\vec{x}_2 \in X$  sind **indifferent** zueinander, wenn keiner den jeweils anderen dominiert.

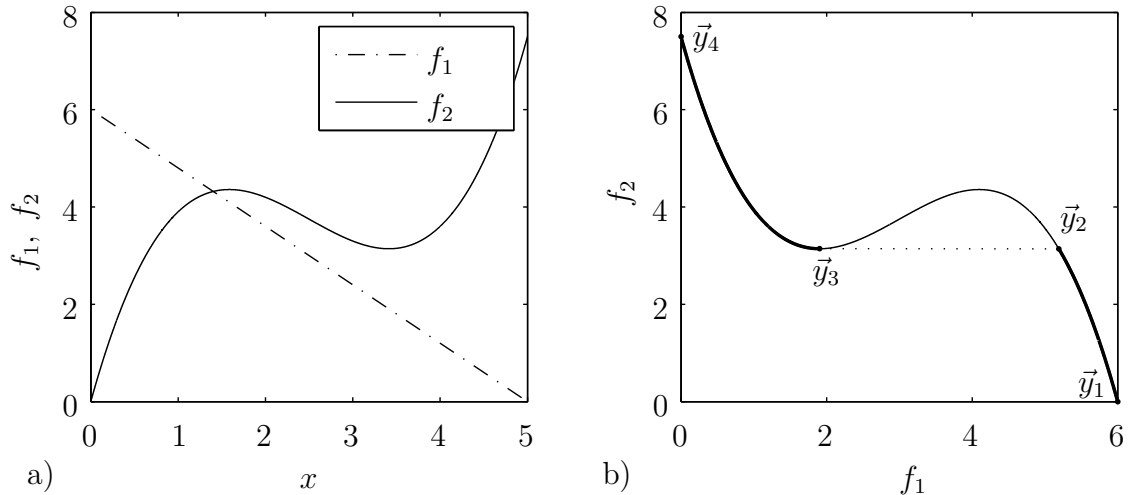


Abbildung 2.1: a) Komponenten der Zielfunktion (2.2) über dem Parameter  $x$  und im  
 b) Zielfunktionsraum  $F$  (Pareto-optimale Lösungen sind hervorgehoben)

**Definition 2. Nicht-dominierte Lösungen**

Aus einer Menge von Lösungen  $P$  sind in der Menge der **nicht-dominierte Lösungen**  $N$  sämtliche Lösungen enthalten, die von keiner anderen Lösung aus  $P$  dominiert werden.

**Definition 3. Pareto-optimale Lösung**

Ein Parametervektor  $\vec{x}_1 \in X$  heißt **Pareto-optimal**, wenn er von keinem anderen Parametervektor  $\vec{x}_2 \in X$  dominiert wird. Der zugehörige Zielfunktionsvektor ist dann ebenfalls **Pareto-optimal**.

**Definition 4. Pareto-Menge und Pareto-Front**

Die Menge aller nicht-dominierten Lösungen aus dem zulässigen Parameterraum  $X$  heißt **Pareto-Menge**  $X^*$ . Die zugehörigen Zielfunktionsvektoren bilden die **Pareto-Front**  $F^*$ .

Bei multikriterieller Optimierung wird nach nicht-dominierten Lösungen gesucht, welche der Pareto-Menge angehören bzw. die Pareto-Front möglichst gut approximieren. Bei akademischen Testfällen wie der Aufgabe 2.2 kann die Pareto-Menge häufig exakt angegeben werden. Bei technischen Fragestellungen hingegen ist die reale, physikalisch mögliche Pareto-Front meist nicht bekannt. Daher wird in der vorliegenden Dissertation bei der Optimierung elektrischer Maschinen die Formulierung „nicht-dominierte Lösungen“ verwendet.

Die zuvor vorgestellten Definitionen werden mit Hilfe eines Beispiels mit  $n = 2$  Parametern und  $m = 2$  Zielgrößen in Abbildung 2.2 veranschaulicht. Der zulässige Parameterraum  $X$  wird neben den jeweiligen Unter- und Obergrenzen zusätzlich durch eine lineare Restriktion „beschnitten“. Die drei Parametervektoren  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  und  $\vec{x}_3$  werden durch die

Zielfunktionen in den Zielfunktionsraum  $F$  abgebildet. Die beiden Zielfunktionsvektoren  $\vec{y}_1$  und  $\vec{y}_3$  sind nicht-dominiert,  $\vec{y}_2$  wird hingegen von  $\vec{y}_1$  dominiert. Weiterhin ist  $\vec{x}_1$  Teil der Pareto-Menge, da  $\vec{y}_1$  auf der Pareto-Front  $F^*$  liegt. Die Zielfunktionsvektoren  $\vec{y}_2$  und  $\vec{y}_3$  sind indifferent zueinander.

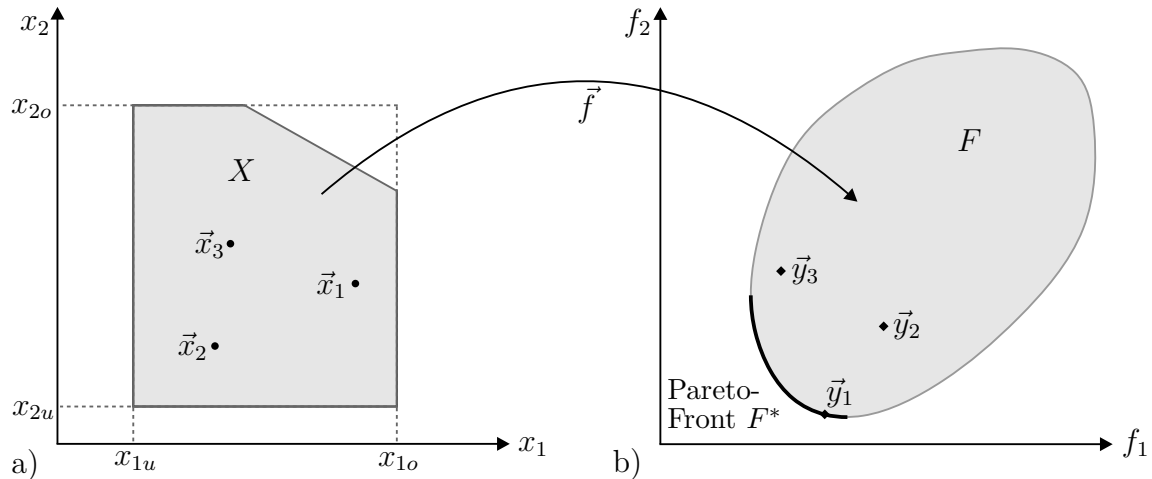


Abbildung 2.2: a) zulässiger Parameterraum  $X$  mit drei Parametervektoren  
b) zugehörige Zielfunktionsvektoren im Zielfunktionsraum  $F$

Um die Lösungen einer Mehrzieloptimierung bewerten zu können, gibt es unterschiedliche Bewertungskriterien bzw. Metriken. Eine davon ist die Angabe von Pareto-Rängen nach Goldberg [36] (vgl. Abbildung 2.3 a).

### Definition 5. Pareto-Rang

Aus einer Menge von Lösungen  $P$  wird allen nicht-dominierten Lösungen der Rang 1 zugewiesen. Diese Lösungen werden aus  $P$  entfernt und den nun nicht-dominierten Lösungen wird der Rang 2 zugewiesen. Der Vorgang wird solange wiederholt bis die Menge  $P$  leer ist.

Sollen die Lösungen unterschiedlicher Optimierungsmethoden miteinander verglichen werden, bietet sich die Angabe des dominierten Hypervolumens an. Diese auch als S-Metrik [94] bezeichnete Größe entspricht bei Optimierungsproblemen mit zwei Zielgrößen einem Flächeninhalt, wie er in Abbildung 2.3 b) beispielhaft grau dargestellt ist.

### Definition 6. Dominiertes Hypervolumen $\mathcal{H}$ (S-Metrik)

Die dominierte Fläche ( $m = 2$ ), das dominierte Volumen ( $m = 3$ ) und allgemein das dominierte Hypervolumen  $\mathcal{H}$  ( $m > 3$ ) ist ein Maß für den Flächen- bzw. Rauminhalt zwischen einer Menge nicht-dominierter Zielfunktionsvektoren  $N$  und einem Referenzpunkt  $\vec{y}_{ref}$ .

Fleischer [34] konnte zeigen, dass die Maximierung des dominierten Hypervolumens der Ermittlung der Pareto-Front gleichkommt. Außerdem stellte er zur Berechnung des dominierten Hypervolumens den *LebMeasure*-Algorithmus vor. Dieser Algorithmus weist eine Komplexität von  $\mathcal{O}(|N|^3 m^2)$  auf, wobei  $|N|$  die Anzahl der nicht-dominierten Lösungen ist.