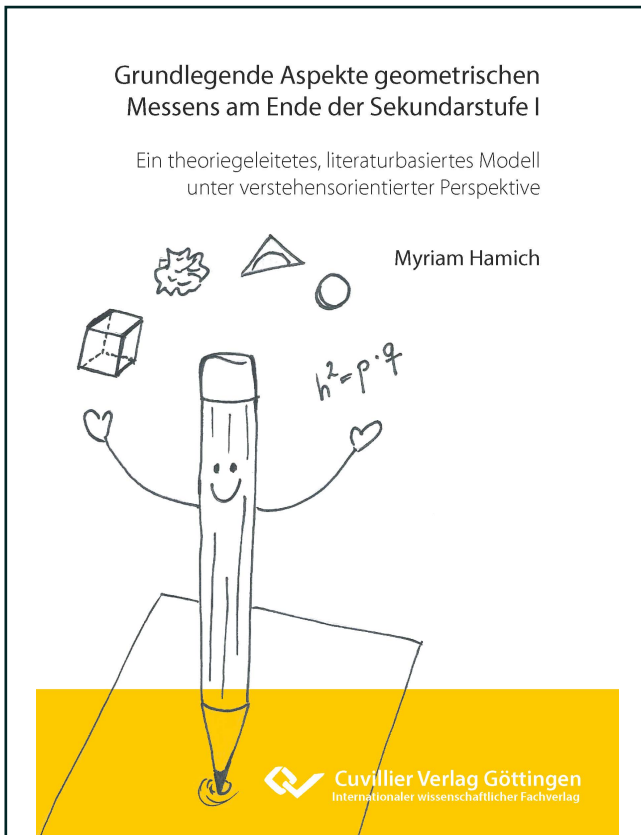




Myriam Hamich (Autor)

# Grundlegende Aspekte geometrischen Messens am Ende der Sekundarstufe I

Ein theoriegeleitetes, literaturbasiertes Modell unter verstehensorientierter Perspektive



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/8604>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen, Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: [info@cuvillier.de](mailto:info@cuvillier.de), Website: <https://cuvillier.de>

# KAPITEL 1

## Einleitung

---

Vor dem Hintergrund hoher Abbruchquoten in MINT-Studiengängen (u.a. DHBW, 2015; Gensch & Kliegl, 2012; Heublein & Schmelzer, 2018) und Schulreformen ist ein Modell entwickelt worden, welches sich als summative Zusammenfassung möglichst aller zentralen Aspekte des Messens und Berechnen am Ende der Sekundarstufe I versteht. Basierend auf einem *systematical literature Review* ist das entwickelte Modell zu grundlegendem Wissen und Können als theoretischer Bezugsrahmen in der Schnittstellendiskussion am Übergang Schule – Hochschule angedacht (Roos et al., 2019) und soll für die Entwicklung und/oder Validierung von Förder- und Diagnoseaufgaben unter einem verstehensorientierten Ansatz genutzt werden.

### 1.1 Hintergrund zur Entstehung dieser Arbeit

Jüngste Studien belegen, dass auch am Ende der gymnasialen Oberstufe allgemeinbildende Leistungsanforderungen, wie sie für den mittleren Schulabschluss erwartet werden, von den SchülerInnen zu einem erheblichen Teil nicht erbracht werden (vgl. Rolfes et al., 2020, S. 26). Dabei werden gerade durch die Anforderungen einer schnell wachsenden globalen Wirtschaft ein „konzeptionell indiziertes, breit angelegtes Fundament an mathematischem Wissen“ (Eli et al., 2013) gefordert.

Insbesondere Themen aus der Geometrie scheinen bei Lehrplanentwicklungen der letzten Jahre in geringem Maß berücksichtigt worden zu sein (Baptist & Winter, 2001; Hammer, 2016, u.a.). Dabei stellt die Geometrie, und insbesondere das Messen, ein einheitliches Thema für den gesamten Mathematiklehrplan dar

(vgl. u.a. Vohns, 2000), das Vernetzungen erlaubt, die sich förderlich auf das Verständnis grundlegender Strukturen auswirken (vgl. Hammer, 2016). Auffallend sind die Schwierigkeiten in der Auseinandersetzung mit diesem mathematischen Bereich, die bei Schülerinnen und Schülern der Elementarstufe und der Sekundarstufe gleichermaßen auftreten und vergleichbar sind (u.a. Dorko & Speer, 2013; O'Dell et al., 2016). An den Themen der Geometrie scheitert eine große Anzahl der Schülerinnen und Schüler (Ali et al., 2014), was Forscher lange über diese Schwierigkeiten und deren Ursachen forschen und berichtet lässt (u.a. Battista, 2006; Gal, Hagar & Linchevski, Liora, 2010; Heinze, 2002; H.-J. Vollrath, 1999). Ein weiterer Punkt in der Diskussion steigender Studienabbruchzahlen sind deutliche Disparitäten zwischen den Bundesländern in Bezug auf die erzielten Mathematikleistungen sowohl in der Sekundarstufe I als auch in der gymnasialen Oberstufe (vgl. Rolfes et al., 2020, S. 25). Die Problematik fehlender mathematischer Vorkenntnisse, die insbesondere bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern von MINT-Studiengängen als Grund für Studienabbrüche und Studienfachwechsel festgestellt wurden, führte in den vergangenen Jahren verstärkt zu Diagnose- und Fördermaßnahmen an nahezu allen Universitäten und Fachhochschulen (Küstermann et al., 2021; Neumann et al., 2018, vgl.).

Erklärter Gegenstand dieser Maßnahmen am Übergang Schule-Hochschule ist meist das Verstehen und Beherrschen, allerdings stellen sich die Konzepte und inhaltlichen Schwerpunktsetzungen nicht einheitlich dar. Beispielsweise gibt es für die Anforderungen im Bereich Mathematik von unterschiedlichen Arbeitsgruppen erstellte Broschüren, die sich mit den in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004) genannten Basiskompetenzen und deren Exemplifizierung durch Beispielaufgaben beschäftigen. Die meisten der Broschüren orientieren sich mit direktem Bezug zur Schulpraxis an den inhaltsbezogenen Leitideen für den Mathematikunterricht. Beispielhaft seien die im Mindestanforderungskatalog der Arbeitsgruppe COSH Cooperation Schule Hochschule (cosh, 2014) genannt. Wie die meisten Broschüren handelt sich um einen Stoffkatalog, der sich inhaltlich an den Bildungsstandards der KMK orientiert und Beispielaufgaben vorstellt. Die Beispielaufgaben stellen Bezug zu Inhalten, Leitideen und/oder Kompetenzen her. Eine fachdidaktische Einordnung, welche die Zugangswege zum Erlangen der inhaltlichen Fähigkeiten und Fertigkeiten repräsentiert, scheint jedoch nicht gegeben. Vielmehr zeigen aktuelle Untersuchungen, dass „weiterhin ein nicht unerheblicher Teil der Schülerinnen und Schüler zwar

erfolgreich das Abitur ablegt, aber nicht über das notwendige mathematische Wissen und Können für ein MINT-Studium verfügt“ (Rolfes et al., 2020, S. 27). Eine Fortführung der Diskussion um mathematisches Grundwissen und -können (Bruder et al., 2015; Feldt-Caesar, 2017; Pinkernell et al., 2017) wie von Rolfes et al. (2020, S. 30) gewünscht, soll im Rahmen dieses Forschungsvorhabens für das Themengebiet des Messens in der Geometrie aufgegriffen werden.

„Mit Sicherheit ist eine breitere Grundbildung, die das Beherrschen grundlegender Techniken und eine hohe Lernbereitschaft einschließt, eine bessere Studienvoraussetzung als die Kenntnis spezieller Gegenstände der Analysis. Wissenschaftsorientierung im Mathematikunterricht muss ja in erster Linie als durchgehende Rationalität, Suche nach maximalem Verständnis und Aufklärung von Denken und Handeln erfahren werden. Der Geometrie sollte ein weit höheres Gewicht als derzeit zukommen. Hier können die Schüler sehen, was sie denken!“ (Baptist & Winter, 2001).

Das Messen geometrischer Größen als Teilgebiet der Geometrie bietet viele Möglichkeiten von Vernetzungen. Allerdings lassen die Studien TIMSS (J. Neubrand et al., 1998) und PISA (u.a. M. Neubrand et al., 2004) darauf schließen, dass „im deutschen Mathematikunterricht oft Technik vor Bedeutung, Kalkül vor Argument zu gehen scheinen“ (J. Neubrand & Neubrand, 2007). Im Laufe der Schulzeit rücken die Rechenkünste immer mehr in den Kernunterricht (Fuehrer, 2002). Die herausragende Bedeutung des Kalküls zeigt sich auch in der hohen Zahl von Berechnungsaufgaben zu geometrischen Objekten in den zentralen Abschlussprüfungen am Ende der allgemeinen Schulpflicht (Gaab, 2015). Dabei ist auch das Berechnen von Flächen- und Rauminhalten letztlich eine Methode des Messens (Kuntze, 2014). Formeln, algorithmusartige Regelsysteme und Algorithmen haben ihren Stellenwert sowohl in der Mathematik an sich als auch in einer vertieften Allgemeinbildung, sofern sie in Sinnzusammenhängen entwickelt, sinnvoll gehandhabt und bewertet werden (vgl. Baptist & Winter, 2001). „Students need to understand why formulas work“ (M. Neubrand, 2010a; Strutchens et al., 2003).

Die vorliegende Forschungs- und Entwicklungsarbeit für den Teilbereich des

Messens in der Geometrie versteht sich in diesem Sinne als Unterstützung zur Analyse und Bewertung von Diagnose- und Fördermaterialien hinsichtlich des untersuchten Themenbereichs, die den Aufbau vernetzter Wissensstrukturen begünstigen.

## 1.2 Einbettung in das Verbundprojekt optes+

Das Forschungsvorhaben ist im Verbundprojekt optes+ (Optimierung in der Selbststudiumsphase) angesiedelt, das im Rahmen des Qualitätspakts Lehre vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) bis 2021 gefördert wurde. Das Projekt optes+ hat es sich zum Ziel gesetzt, „skalierbare, nachhaltig leistbare und adaptive Lösungsansätze für die Studieneingangsphase zu entwickeln, mit dem Ziel, Studierende besser auf ihren Studienstart vorzubereiten“ (Küstermann, 2021).

Das vorliegende Forschungsvorhaben ist einem Teilprojekt zur Entwicklung eines adaptiven und selbstlernenden Empfehlungssystems für mathematische Aufgaben zugeordnet. Ziel ist hierbei die praktische Realisierung eines Empfehlungssystems für mathematische Übungsaufgaben im Rahmen des Projekts optes (vgl. Roos et al., 2019), welches Lernende mit Hilfe eines adaptiven Empfehlungssystems (vgl. Götz, 2021; Götz & Wankerl, 2020) entsprechend ihrer Fähigkeiten und Fertigkeiten optimal in ihrem Lernprozess unterstützen soll. Umgesetzt wird dieses, indem mathematische Inhalte und mehr als 150 Übungsaufgaben individuell, in geeigneter Reihenfolge vorgeschlagen und wiederholt werden. Der Empfehlungsalgorithmus analysiert hierfür das Verhalten der Lernenden und nutzt zur Lösung des „Kaltstartproblems“ (mangelnde Daten zu Beginn) fachdidaktische Modelle des Wissens und Könnens (Pinkernell et al., 2017), welche ihm die Bereitstellung eines ausgewogenen Aufgabenpools sowie eine intrinsisch verwendete Sortierung der Lernmaterialien ermöglicht. Das in vorliegender Arbeit entwickelte Modell zum Messen und Berechnen soll in diesem Zusammenhang eingesetzt werden.

## 1.3 Inhalte der Arbeit

### 1.3.1 Theorieteil der Arbeit

Im 2. Kapitel der Arbeit findet eine theoriebasierte Klärung der für das vorliegende Forschungsvorhaben bedeutsamen Begriffe statt, um einen theoretischen Rahmen der Arbeit aufzubauen. Kapitel 3 klärt den thematischen Rahmen und schließt mit der Formulierung der Forschungsfragen.

## Kapitel 2 „Wissenserwerb – Theoretischer Hintergrund“

### **Abschnitt 2.1 „Modelle mathematischen Wissens in der kognitionspsychologischen Literatur“**

In einem ersten Abschnitt wird in einer ausführlichen Vorstellung ausgewählter kognitionspsychologischer Modelle mathematischen Wissens zunächst eine Rahmung der im Modell verwendeten Begriffe *Wissen* und *Können* gesetzt. Diskutiert werden Modelle von Hiebert und LeFevre (1986), Anderson (1996) und Skemp (1976). Daraus ergibt sich eine Betrachtung des synonymen Gebrauchs der in den Modellen gebräuchlichen Begriffe.

### **Abschnitt 2.2 „Aspekte des Verstehens von Mathematik“**

Im zweiten Abschnitt erfolgt eine intensive Auseinandersetzung aus unterschiedlichen Perspektiven mit dem vielschichtigen Begriff des „Verstehens“.

In ihren Grundsätzen vorgestellt werden zunächst die drei einflussreichsten Lerntheorien aus Sicht der Neurowissenschaften, da das Verstehen als Umgang mit Wissen sowohl auf den kognitionstheoretischen als auch auf den konstruktivismustheoretischen Ansatz Bezug nimmt (vgl. Sjuts, 2001).

In den Unterabschnitten 2.2.2 „mathematische Verstehensmodelle“ und 2.2.3 „Sinnstiftung im Mathematiklernen“ wird der Blick vermehrt auf die Mathematik gelenkt, indem mathematische Verstehensmodelle und der Begriff der „Sinnstiftung“ im Mathematiklernen näher betrachtet werden.

### **Abschnitt 2.3 „Verstehensorientierung – Zugänge zu mathematischen Inhalten“**

In diesem dritten Abschnitt werden unterschiedliche Zugänge zu mathematischen Inhalten vorgestellt. Es handelt sich um vier Zugänge zum Verstehen mathematischer Inhalte und deren unterschiedlicher Umgang mit Wissen und Wissensrepräsentationen für eine gelungene Aneignung, Sicherung und Nutzung von Wissen.

### **Abschnitt 2.4 „Kompetenzen und Mindest- oder Regelstandards“**

Es folgt eine Vorstellung bestehender Konzepte zur Konkretisierung von Standards in mathematischer Bildung aus Schulperspektive. Dabei wird im Unterabschnitt 2.4.1 der Begriff der Kompetenz nach Weinert (1996) eingehend diskutiert.

### **Abschnitt 2.5 „Zur Abgrenzung des Forschungsvorhabens zu Kompetenzen und Mindest-/Regelstandards“**

Dieser Abschnitt diskutiert die im Zusammenhang mit den Bildungsstandards genannten Begriffe Kompetenz und Standards hinsichtlich ihrer Eignung für den Einsatz im vorliegenden Forschungsvorhaben.

## **Kapitel 3 „Gestaltung einer summativen Zusammenfassung zum Messen in der Sekundarstufe I“**

### **Abschnitt 3.1 „Messen – eine Eingrenzung des mathematischen Inhaltsbereichs“**

Es erfolgt eine Eingrenzung des mathematischen Inhaltsbereichs (Abschnitt 3.1) indem das Messen zunächst im Kontext der Hochschulmathematik, der Mathematikdidaktik und der Schulmathematik und deren Berücksichtigung in den Bildungsplänen der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004) betrachtet werden. Die unterschiedlichen Perspektiven führen zu einer inhaltlichen Konkretisierung des Begriffs Messen für die vorliegende Forschungsarbeit.

### **Abschnitt 3.2 „Ablaufplan der Modellentwicklung“**

Eine Darstellung zum Verlauf der Forschungsarbeiten soll die Orientierung in der Arbeit unterstützen, in der unterschiedliche Stadien der Modellentwicklung gezeigt werden.

### **Abschnitt 3.3 „A-Priori-Rahmenstruktur des Modells“ und Abschnitt 3.4 „Konkretisierung des Modells für das Messen aus didaktischer Perspektive“**

Die Rahmenstruktur wird von zwei Dimensionen aufgespannt, deren Hintergründe in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Sowohl die waagrecht aufgeführten handlungsbezogenen Facetten des Wissens und Könnens als auch die vertikal angeordneten Elemente des Inhaltsbereichs werden beschrieben und theoretisch untermauert.

Die Konkretisierung des Modells für das Messen basierend auf einer nicht standardisierten Literaturrecherche, ordnet die gegenstandsbezogenen Tätigkeitsbeschreibungen des Messens der Rahmenstruktur des Modells zu. Das in diesem Abschnitt beschriebene Modell bildet die Grundlage der in Abschnitt 5.2 konkretisierten ExpertInneninterviews zur inhaltlichen Validierung des Modells.

### **Abschnitt 3.5 „Forschungsfragen“**

Der letzte zum Theorieteil formulierte Abschnitt benennt die leitenden Forschungsfragen, an denen sich die vorliegende Forschungsarbeit orientiert.

## 1.3.2 Methodenteil der Arbeit

Zur Beantwortung der Forschungsfragen werden im Rahmen dieser Arbeit die Methoden der systematischen Literaturrecherche und des ExpertInneninterviews gewählt.

## **Kapitel 4 „Die systematische Literaturrecherche“**

Kapitel 4 befasst sich mit der Vorstellung der hier verwendeten, eigenständigen Forschungsmethode der *systematischen Literaturrecherche*. Die *systematische Literaturrecherche* auch als *systematisches Literaturreview* oder im englischen Original als *systematical literature review* bezeichnete Verfahren ist der Medizin entliehen und wird auf das Forschungsvorhaben hinsichtlich der spezifischen Anforderungen



des Bereichs der Mathematikdidaktik angepasst. Diese Methode des systematischen Literaturreviews gilt als Goldstandard unter den Übersichtsarbeiten (Booth et al., 2016) und kommt insbesondere dann zum Einsatz, wenn möglichst alle relevante Literatur zu einer genau definierten Fragestellung gesucht wird. Zunächst wird die Methode allgemein beschrieben (Abschnitt 4.1), bevor die Adaption auf das Forschungsvorhaben (Abschnitt 4.2) und die Ergebnisse (Abschnitt 6.1) vorgestellt werden.

### **Kapitel 5 „Das ExpertInneninterview“**

Zur Validierung eines sogenannten Zwischenstandmodells, das aus einer nicht standardisierten Literaturrecherche resultiert, wird zur Konsensbildung von ExpertInnenaussagen bezüglich des Forschungsvorhabens dieses Modell im Rahmen eines ExpertInneninterviews zur Diskussion gestellt (Kapitel 5). In den schriftlichen Interviews werden sowohl qualitative als auch quantitative Daten erhoben, die im Rahmen eines induktiven-deduktiven Codierens nach der Qualitativen Inhaltsanalyse von Mayring [5.1.5] zur Darstellung ihres inhaltlichen Kerns aufbereitet werden. Die geclusterten Aussagen werden den aus der Arbeit von Pinkernell et al. (2017) entlehnten Kategorien zusammengefasst und hinsichtlich ihres Einflusses auf eine mögliche Modellrevision beurteilt. Die vier Kategorien betreffen (a) Klärung des theoretischen Rahmens, (b) Restrukturierung des Modells, (c) Neuformulierung von Aspektdefinitionen und (d) allgemeinen Aussagen zum Modell (siehe Unterabschnitte 6.2.2 bis 6.2.5).

Die qualitativen Daten werten Zuordnungen der ExpertInnen von insgesamt 26 Items zu den Aspekten des Zwischenstandmodells aus, um eine Aussage bezüglich der Verständlichkeit und Akzeptanz der Aspekte und ihrer Formulierungen zu generieren.

### 1.3.3 Ergebnisteil der Arbeit

Nach Vorstellung der Ergebnisse aus der systematischen Literaturrecherche und dem ExpertInneninterview mit den qualitativen und quantitativen Daten, fließen diese im Abschnitt 6.3 in einem für das Forschungsvorhaben abschließenden Gesamtmodell zu grundlegendem Wissen und Können im Bereich des geome-

trischen Messens am Ende der Sekundarstufe I ein. Das Modell wird in seiner tabellarischen Darstellung präsentiert und unter Berücksichtigung aller Forschungsergebnisse beschrieben.

Eine Diskussion der inhaltlichen Umsetzung der Forschungsfragen, einer möglichen Anwendung des Modells sowie der angewendeten Forschungsmethoden, bilden mit einem Ausblick auf mögliche, anschließende Forschungsaufgaben den Abschluss der vorliegenden Arbeit.

