



Markus Heß

**Über die exakte Abbildung ausgewählter
dreidimensionaler Kontakte auf Systeme
mit niedrigerer räumlicher Dimension**



Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

Über die exakte Abbildung ausgewählter dreidimensionaler Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Markus HEß
aus Neustadt in Holstein

von der
Fakultät V für Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. -
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Henning Jürgen MEYER
Berichter: Prof. Dr. rer. nat. Valentin POPOV
Prof. Dr.-Ing. Georg-Peter OSTERMEYER

Eingereicht am: 04. März 2011
Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 18. Mai 2011

Berlin 2011

D83

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2011

Zugl.: (TU) Berlin, Univ., Diss., 2011

978-3-86955-823-3

D83

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2011

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen

Telefon: 0551-54724-0

Telefax: 0551-54724-21

www.cuvillier.de

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage 2011

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

978-3-86955-823-3

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin.

Dem Leiter des Fachgebiets Systemdynamik und Reibungsphysik, Herrn Prof. Dr. rer. nat. Valentin POPOV, bin ich zu besonderem Dank verpflichtet. Er trägt großen Anteil daran, dass meine ingenieurwissenschaftlichen Kenntnisse durch solche der höheren Mathematik und Naturwissenschaften bereichert wurden. Prof. Dr. rer. nat. Valentin POPOV regte diese Arbeit an, ließ mir aber auch mit großem Vertrauen viel Freiraum. Innerhalb zahlreicher konstruktiver Diskussionen lieferte er unzählige wertvolle Hinweise.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Georg-Peter OSTERMEYER danke ich einerseits für seine Tätigkeit als Gutachter, zum anderen für die vielen anregenden Gespräche auf verschiedenen Workshops. An seinen energiereichen, von hoher Didaktik geprägten Lehrveranstaltungen durfte ich mich einst als Student im Hauptstudium erfreuen. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Henning Jürgen MEYER, der sich umgehend bereit erklärt hatte, den Vorsitz im Prüfungsausschuss zu übernehmen.

Danken möchte ich zudem Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerd BRUNK. Die überabzählbare Menge von Diskussionen auch über die Mechanik hinausgehende Themen haben mir immer viel Freude bereitet, sowohl als Tutor als auch wissenschaftlicher Mitarbeiter. Darüberhinaus danke ich Herrn Dr.-Ing. Thomas GEIKE für die gute Zusammenarbeit und einige wichtige Impulse diese Arbeit betreffend. Zuletzt gebührt mein Dank Herrn Dr.-Ing. Uwe HERBRICH, Herrn Dipl.-Ing. Peter LÖWIS und Herrn Dipl.-Ing. Andreas THATE, die mir in vielerlei Hinsicht sehr geholfen haben.

Berlin, im Februar 2011

Markus HESS

Abstract

The foundation of a new theory of contact, the so called reduction-method, was laid in 2007. V.L. POPOV und T. GEIKE succeeded in *exactly* mapping the three-dimensional HERTZian contact on a one-dimensional model. Based on that they developed a one-dimensional system to simulate the contact problem between two three-dimensional bodies with randomly rough surfaces. This meant a huge reduction of computational time.

The present work primarily researches the possibility of mapping three-dimensional contact problems on systems of lower spatial dimension in an *exact* manner. Starting from the classical theory of elasticity it is shown that the relationship between load, penetration and contact radius of every axisymmetric contact can be mapped *exactly* on a one-dimensional system, thus the method is valid for any conforming and non-conforming contacts. Furthermore the real pressure distribution can be recovered by the dynamics of the reduced model.

In addition, I succeeded in the extension of reduction-method on contact with adhesion. A generalization of the theory of JOHNSON, KENDALL and ROBERTS for arbitrary shaped axisymmetric bodies dates back to 2005. It has been shown in the thesis, that this theory can be *exactly* described by a one-dimensional model, too, in a very simple manner.

Based on form-invariance of an equation system I develop a new principle of correspondence between axisymmetric and plane contact problems, valid for normal and axisymmetric tangential contact. It allows the calculation of stresses and displacements within the axisymmetric half-space by a two-dimensional system. This principle of correspondence is applicable to layered as well as inhomogeneous half-space. A simple connection between the one- and the two-dimensional model is discussed. I prove the validity by numerical calculations. The correspondence does not depend on any discretization method and can be implemented into any commercial software.

In many cases two-dimensional models are used for the simulation of three-dimensional tribological systems. All of them accept an error, since the nature of plane and spatial media is completely different. However, considering the elastic-inhomogeneous half-plane, especially the GIBSON-half-plane, several characteristics of the homogeneous three-dimensional continuum can be mapped *precisely*. Among others, this thesis pays particular attention to the tangential contact of a sphere in the state of partial slip.

The present work also contains one systematically structured chapter about the isotropy of elastic lattices. Regarding the mapping of the isotropic, plane elastic continuum existing models are compared in terms of kinematic-dynamic and energetic aspects. From the contact mechanical viewpoint an error analysis based on numerical simulations seems to be difficult, since the satisfaction of boundary conditions in the plane case is a major problem.

In contrast to the main goal of mapping contact problems in a *precise* manner, I study the contact of self-affine fractal surfaces by a three-dimensional hierarchical model. Partially very strong assumptions reduce the degrees of freedom enormously and thus the calculation time, too. To what extent this model reaches reasonable results referring to contact area, pressure distribution, interfacial separation, topography and percolation on different length-scales is being discussed.

Zusammenfassung

Im Jahre 2007 wurde der Grundstein einer neuen Kontakt- und Reibungstheorie gelegt, die sogenannte *Dimensionsreduktionsmethode*. V.L. POPOV und T. GEIKE gelang es, den dreidimensionalen HERTZschen Kontakt *exakt* durch ein eindimensionales Modell abzubilden. Darauf aufbauend entwickelten sie ein für typische tribologische Systeme hervorragend geeignetes 1D-Modell zur Simulation des 3D-Kontaktes rauher Oberflächen, verbunden mit einer enormen Einsparung an Rechenzeit.

In Anlehnung an die Grundidee der Reduktionsmethode beschäftigt sich die vorliegende Arbeit hauptsächlich mit der *exakten Abbildung dreidimensionaler Kontaktprobleme auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension*. Ausgehend von der klassischen Elastizitätstheorie erfolgt zunächst der analytische Nachweis dafür, dass sich jeder konforme, reibungsfreie, axialsymmetrische Normalkontakt auf ein eindimensionales Modell abbilden lässt, welches die Zusammenhänge zwischen Normalkraft, Eindringtiefe und Kontaktradius im Original *exakt* wiedergibt. Zudem werden unterschiedliche Möglichkeiten aufgezeigt, mit deren Hilfe die realen Kontaktspannungen aus der Dynamik des Ersatzsystems *exakt* filterbar sind.

Die Verallgemeinerung der Adhäsionstheorie von JOHNSON, KENDALL und ROBERTS auf beliebig geformte axialsymmetrische Kontakte geht auf das Jahr 2005 zurück. Dass sich diese Theorie auf sehr einfache Weise ebenfalls durch ein eindimensionales Modell *exakt* abbilden lässt, wird in der Dissertation unter Beweis gestellt.

Des Weiteren wird aus gewissen Forminvarianzen heraus ein Korrespondenzprinzip hergeleitet, das für den Normal- und axialsymmetrischen Tangentialkontakt gültig ist. Es erlaubt die *exakte* Umrechnung zwischen den Feldgrößen ebener und axialsymmetrischer Systeme. Die Spannungen und Verschiebungen im Inneren des axialsymmetrisch beanspruchten Halbraums sind damit *exakt* aus einem ebenen Verzerrungs- bzw. Spannungszustand reproduzierbar. Das Korrespondenzprinzip ist gleichermaßen auf geschichtete oder aber inhomogene Halbräume anwendbar. Eine Schnittstelle dieser 2D-Reduktion zum 1D-Modell wird präsentiert und die *Exaktheit* des Reduktionsalgorithmus anhand von ausgewählten, numerischen Simulationen untermauert. Das Prinzip ist an keinerlei numerisches Diskretisierungsverfahren gebunden und kann problemlos in jedwede kommerzielle Software implementiert werden.

Zur Simulation von dreidimensionalen tribologischen Systemen kommen in der Praxis häufig zweidimensionale Modelle zum Einsatz. Jene nehmen allesamt einen Fehler in Kauf, da die Natur ebener und räumlicher elastischer Festkörper grundsätzlich verschieden ist. Betrachtet man hingegen elastisch-inhomogene, zweidimensionale Medien, insbesondere die Gibson-Halbscheibe, können diverse Charakteristika des homogenen dreidimensionalen Kontinuums *exakt* nachgebildet werden. Solche sind ebenfalls Gegenstand der Arbeit; besondere Aufmerksamkeit wird dem Tangentialkontakt einer Kugel im Zustand des partiellen Gleitens gewidmet.

Daneben enthält die Dissertation ein systematisch aufgebautes Kapitel über die Isotropie elastischer Gitter. Mit Blick auf die Abbildung des isotropen, ebenen Kontinuums werden die existierenden Modelle unter kinematisch-dynamischen und energetischen Aspekten gegenübergestellt. Aus kontaktmechanischer Sicht erscheint eine auf numerische Simulationen beruhende Fehleranalyse schwierig, weil das Einhalten sämtlicher Randbedingungen im ebenen Fall ein eigenständiges Problem darstellt.

Abweichend vom Grundsatz der Arbeit, Kontaktprobleme *exakt* abbilden zu wollen, wird zuletzt der Kontakt selbstaffin fraktaler Oberflächen numerisch mit Hilfe eines dreidimensionalen hierarchischen Gittermodells untersucht. Die zum Teil sehr starken Annahmen führen zu einer erheblichen Reduzierung von Freiheitsgraden und damit Einsparung von Rechenzeit. Inwieweit mit diesem Modell vertretbare Ergebnisse hinsichtlich Kontaktfläche, Druckverteilung, relative Annäherung der Oberflächen sowie Topographie und Dichtheit auf verschiedenen Skalen erzielt werden können, wird diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Stand der Forschung - Theorie und Anwendung	1
1.1.1	Einzelkontakt	1
1.1.2	Kontakt rauher Oberflächen	3
1.1.3	Dimensionsreduktionsmethode	4
1.2	Zielsetzung	5
2	Abbildung des elastischen Kontaktes axialsymmetrischer Indenter beliebigen Profils mittels Dimensionsreduktion	9
2.1	Dreidimensionales Kontaktproblem	9
2.1.1	Grundgleichungen der Elastostatik	10
2.1.2	Darstellung über Verschiebungsfunktion	11
2.1.3	Lösung mittels HANKEL-Transformation für den axialsymmetrischen Fall . . .	13
2.1.4	Kontaktkraft und Eindrücktiefe bei einem Polynom n -ten Grades als Formfunktion	15
2.2	Eindimensionales Ersatzmodell	16
2.2.1	Erkenntnisse aus Kontaktkraft und Eindrücktiefe nach SNEDDON	16
2.3	Abbildung der Normalspannungsverteilung im Kontaktgebiet	19
2.3.1	Kontaktspannungsverteilung in Abhängigkeit der 3D-Indentergeometrie . . .	20
2.3.2	Kontaktspannungsverteilung im analogen zweidimensionalen Fall	22
2.3.3	Zweidimensionales Ersatzmodell – Abbildung von Kontaktspannungen	25
2.3.4	Eindimensionales Ersatzmodell – Abbildung von Kontaktspannungen	27
2.4	Abbildung der Feldgrößen im Inneren des Halbraums	32
2.4.1	Bedeutung der Forminvarianz ebener und axialsymmetrischer Systeme inklusive der Erweiterung auf raue Indenter	33
2.4.2	Schnittstelle zum eindimensionalen Federmodell bei reinem Normalkontakt . .	37
2.4.3	Anwendung auf den elastoplastischen Normalkontakt	40
2.5	Zusammenfassung zu einem vollständigen Algorithmus	50

3	Erweiterung der Reduktionsmethode zur Abbildung des adhäsiven Kontaktes	53
3.1	Das vollständige Gleichungssystem nach SNEDDON – Einfluß der Starrkörpertranslation	53
3.1.1	1D-Reduktion des nicht-adhäsiven Halbraumkontaktes mit einem flachen zylindrischen Stempel	54
3.1.2	Spannungen und Verschiebungen in der Nähe des Kontaktrandes – Analogie zum Rissspitzenfeld	55
3.1.3	Verallgemeinerung der JKR-Theorie für beliebig geformte axialsymmetrische Oberflächenprofile	55
3.2	Eindimensionales Ersatzmodell für den adhäsiven Kontakt	60
3.2.1	Andruck- und Abziehvorgang – Abreißbedingung	61
3.3	Anwendung des Korrespondenzprinzips auf den adhäsiven Kontakt	62
3.3.1	Spannungen an der Oberfläche eines adhäsiven Kontaktes	62
3.3.2	Vergleichsspannungen im Halbraum für den adhäsiven Kontakt eines Paraboloids	64
4	Reduktionen auf Basis inhomogener ebener Medien – Graded Materials	67
4.1	Selbstähnlichkeit und Gleichgewicht	67
4.2	Halbebene mit einem mit der Tiefe z veränderlichen E -Modul	68
4.2.1	GREEN-Funktionen für die linear-inhomogene Halbebene	69
4.2.2	Abbildung <i>inkompressibler</i> elastischer Materialien in axialsymmetrischen Kontakten – <i>Anbindung an den Algorithmus der Dimensionsreduktion</i>	72
4.3	Abbildung des Tangentialkontaktes zwischen Kugel und elastischem Halbraum	76
4.3.1	Tangentialer Kugelkontakt mit partiellem Gleiten	76
4.3.2	Tangentialkontakt zwischen starrem Zylinder und GIBSON-Medium	77
5	Isotropie elastischer Gittermodelle	83
5.1	Klassifizierung ebener, elastischer Systeme	84
5.2	Quadratisches Gitter und Isotropie	85
5.2.1	Zentrale Wechselwirkungen zu ersten und zweiten Nachbarn	85
5.2.2	BORN-Modell mit unabhängigen elastischen Parametern	87
5.2.3	Rotationsinvariantes Modell	90
5.2.4	MCA-Modell mit effektiver Bindungslänge	92
5.2.5	Zur Randproblematik bei ebenen Systemen am numerischen Beispiel	93
5.3	Räumliches Gittermodell mit effektiver Bindung	95

6	Kontaktsimulation mittels hierarchischer Gittermodelle	99
6.1	Motivation	99
6.1.1	Vollständiger Kontakt zwischen einer starren sinusförmigen Oberfläche und dem elastischen Halbraum	99
6.1.2	Struktur hierarchischer Systeme	101
6.2	Kontaktformulierung und Testfälle	102
6.2.1	Vollständiger Kontakt mit sinusförmiger Oberfläche	102
6.2.2	HERTZscher Kontakt	104
6.3	Kontakt mit rauen Oberflächen	106
6.3.1	Höhenprofil und Leistungsspektrum	107
6.3.2	Selbstaffin fraktale Oberflächen	107
6.4	Ergebnisse numerischer Simulationen mit selbstaffin fraktalen Oberflächen	108
6.4.1	Kontaktfläche vs. Normalkraft bei verschiedenen Auflösungen	109
6.4.2	Mittlerer Abstand der kontaktierenden Oberflächen und Topographie	113
6.5	Ergebnisdiskussion	115
7	Zusammenfassung und Ausblick	117
A	Differenzialoperatoren und Integraltransformationen	121
A.1	Differenzialoperatoren	121
A.2	Integraltransformationen	121
B	Zum zweidimensionalen Kontaktproblem	125
B.1	Herleitung der integralen Bestimmungsgleichungen für die Feldgrößen	125
B.2	Lösung von Dualintegralgleichungen	126
C	Ergänzungen zum axialsymmetrischen Kontaktproblem	129
C.1	Darstellung der realen Oberflächenverschiebung über verallgemeinerte LEGENDRE-Polynome	129
C.2	Darstellung der Geometrie des Ersatzmodells über Wurzelglieder	131
D	Bruchmechanische Grundlagen	135
D.1	Energiefreisetzungsrates und Bruchkriterium nach GRIFFITH	135
D.2	Äquivalenz zum Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren	137
E	Linienkontakt des inhomogenen elastischen Kontinuums	139
F	Kinematik und Dynamik hierarchischer Systeme	143
F.1	Wechselwirkungen zwischen den Teilchen	144
F.2	Wechselwirkungen mit der Oberfläche, Kontaktdefinition	145
	Literaturverzeichnis	147

Symbolverzeichnis

a	Kontaktradius, Kontakthalbbreite
\mathcal{A}_n	ABEL-Transformation n-ter Art
\mathcal{A}_{Br}	ABEL-Transformation nach BRACEWELL
a_c	Kritischer Kontaktradius
α	Exponent der elastischen Inhomogenität
A_o	nominelle Kontaktfläche
A_{real}	Reale Kontaktfläche
β	Elastischer Parameter für inhomogenes Material
β_n	Geometrieabhängiger Formfaktor
β_D	Elastischer Parameter nach DUNDUR
c	Haftkontakthalbbreite
c_n, \tilde{c}_n	Geometrieabhängige Vorfaktoren in der Formfunktion
$C(\mathbf{q})$	Leistungsspektrum der Rauheiten
\mathbf{D}	Infinitesimaler Verzerrungstensor, Deformator
δ	Eindrücktiefe
δ_c	Tiefe des Eindruckes im Kontaktbereich; Kritische Eindrücktiefe (Kapitel 3)
δ_x	horizontale Verschiebung aller Punkte im Haftgebiet des Tangentialkontaktes
E_{ijkl}	Skalarwertige Komponenten des isotropen Elastizitätstensors 4.Stufe
$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$	Koordinaten des deviatorischen Anteils von \mathbf{D}
\tilde{E}	Effektiver elastischer Modul
ϵ_{ijk}	Permutationssymbol
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
E_w^*	Modul der einachsigen Kompression einer WINKLERSchen Bettung
\mathbf{f}_v	Volumenkraftdichte

$f(x)$	Formfunktion
\mathbf{G}	GREENScher Verzerrungstensor
G	Schubmodul
$\bar{\gamma}$	DUPRÉsche Adhäsionsenergie, Oberflächenenergie (pro Einheitsfläche)
γ_i	Geometrieabhängiger Formfaktor
γ_n	Ordnungsparameter, enthalten in der Formulierung für den normierten Druck
\tilde{G}	Elastische Energiefreisetzungsrate; Fit-Parameter (Kapitel 6)
H	HURST-Exponent/Rauheitsexponent
h_{RMS}	Mittenrauwert
\mathbf{I}	Einheitstensor
J_2	Zweite Invariante des Spannungsdeviators
J_n	Besselfunktion 1. Art der Ordnung n
k, k_D	Längssteifigkeiten
K_I, K	Spannungsintensitätsfaktoren
K_{2D}	Flächenelastizitätsmodul
K_{3D}	Volumenelastizitätsmodul, Kompressionsmodul
\varkappa_n	Formfaktor
K_c	Bruchzähigkeit
k_p, k_δ	maßeinheitenbehaftete Konstanten ohne größere physikalische Bedeutung
k_s	Schubsteifigkeit
k_T	Drehfedersteifigkeit
k_W	Steifigkeit der WINKLER- Bettung [Kraft/Volumen]
ℓ	momentane Risslänge
λ, ξ	Bildvariablen im FOURIER- bzw. 'HANKEL'-Raum
λ	Wellenlänge
λ, μ	LAMÉsche Konstanten
L	LOVESche Verschiebungsfunktion; Systembreite
m_E	Koeffizient der elastischen Inhomogenität
$\bar{m}_E, \bar{\nu}$	Elastische Parameter einer linear inhomogenen Scheibe
μ	Reibungskoeffizient
N	Teilchenanzahl (innerhalb Systembreite)

P	Normalkraft (vertikale Einzelkraft) bei einem punktförmigen Kontakt; auf Einheitstiefe/-dicke bezogene Vertikalkraft bei einem Linienkontakt
P_c	Adhäsionskraft
Φ	Spannungsfunktion nach AIRY
\bar{p}	Mittlerer Druck
$P_{n.a.}$	(Scheinbare) Normalkraft für einen Kontakt ohne Adhäsion, welche zum gleichen Kontaktradius führt, wie im Fall mit Adhäsion
p_o	Nomineller Kontaktdruck, Druckmaximum, kritischer Anpressdruck
Q	Horizontale Einzelkraft bei einem Punktkontakt; auf Einheitstiefe/-dicke bezogene horizontale Einzelkraft bei einem Linienkontakt
q_0, q_1	untere, obere Grenzwellenzahl
R	Krümmungsradius beim Kugelkontakt
R_{1D}	Krümmungsradius im 1D-Ersatzmodell
r_D	Radius, bei welchem in einem adhäsiven Kontakt innerhalb der Kontaktfläche noch Druckspannungen vorliegen
S	CAUCHYscher Spannungstensor
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Hauptspannungen
$\overset{\circ}{\mathbf{S}}$	Spannungsdeviator
$\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III}$	Hauptschubspannungen
u	Verschiebungsvektor
U	Innere Energie
U_{el}	Elastische Energie
U_{el}^k	Komplementäre elastische Energie
U_S	Oberflächenenergie
\bar{u}_z	Oberflächennormalverschiebung
\mathcal{W}	WEBERtransformation
W^a	Arbeit äußerer Lasten
Z	GALERKINScher Vektor
Δz_{kr}	kritischer (kontaktgebender) Abstand
∇Z	RMS-Steigung der Oberfläche

Kapitel 1

Einleitung

Als interdisziplinäre Wissenschaft vereint die Tribologie sämtliche naturwissenschaftliche Gebiete und stellt somit eines der schwierigsten und größten Forschungsfelder. Unzählige Anwendungsbereiche von der Nano- über die Mikro- und Makro- bis zur Megaskala unterstreichen dessen Notwendigkeit. Exemplarisch seien obiger Reihenfolge genügend die Rasterkraftmikroskopie, mikro-elektromechanische Systeme (MEMS), das chemisch-mechanische Polieren (CMP), Kupplungen und Bremsen, Gelenke, der Rad-Schiene-Kontakt und die Erdbebendynamik erwähnt. Die damit verbundenen Untersuchungen sind sowohl experimenteller als auch theoretischer Natur, wobei letzteren eine immer größere Bedeutung zukommt. Um den Einfluss von Änderungen in den Systemparametern tribologischer Systeme zu studieren, kann nicht jedes mal ein neues, aufwendiges Experiment erfolgen. An dessen Stelle tritt die numerische Simulation basierend auf theoretischen Überlegungen, die im Rahmen der Optimierung von Tribosystemen umfangreiche Parameterstudien zulässt.

Zentrum der Analyse einer jeden tribologischen Problemstellung bildet die Untersuchung des Kontaktzustandes. Insbesondere sind Kenntnisse über die Größe und Topographie der sogenannten realen Kontaktfläche von großer Bedeutung, denn sie bestimmen nicht nur die Dichtigkeit einer Verbindung, sondern auch den elektrischen und thermischen Widerstand. Nicht zuletzt finden Reibungs- und Verschleißvorgänge in erster Linie in der realen Kontaktfläche statt. Die vorliegende Arbeit betrachtet Tribosysteme aus kontaktmechanischer Sicht, bedient sich dabei hauptsächlich der klassischen Elastizitätstheorie. Nachfolgend wird ein kleiner Abriss über wesentliche diese Arbeit betreffende und die Kontaktmechanik prägende Literatur gegeben, zum Teil mit wichtigen Anmerkungen versehen. Jene sind als Schnittstellen zum eigentlichen Vorhaben zu verstehen, welches im anschließenden Kapitel im Detail erläutert wird. Hier sei lediglich vorweggenommen, dass es um die *exakte Abbildung dreidimensionaler Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension* geht – die Betonung liegt dabei auf „*exakt*“.

Für genauere Übersichten zur Kontaktmechanik mit umfassenden Literaturangaben werden dem Leser die Werke von GLADWELL [39], JOHNSON [53], MAUGIS [66], BARBER [6] und POPOV [91] nahegelegt.

1.1 Stand der Forschung - Theorie und Anwendung

1.1.1 Einzelkontakt

Die klassische Kontaktmechanik beginnt mit dem Beitrag von HERTZ [45], der 1882 die Lösung für den Normalkontakt zweier elastischer Körper mit glatten, gekrümmten Oberflächen vorstellte.

Er lieferte sowohl die Zusammenhänge für Normalkraft P , Eindrücktiefe δ und Kontaktradius a als auch die Kontaktspannungsverteilung.

Grundlage des Superpositionsprinzips zur Berechnung der Spannungen \mathbf{S} und Verschiebungen \mathbf{u} innerhalb eines durch verteilte Oberflächenlasten beanspruchten elastischen Halbraums bilden die sogenannten GREEN-Funktionen. Das sind die entsprechenden Felder, welche aus einer Normalkraft P bzw. Tangentialkraft Q resultieren und deren Berechnung auf BOUSSINESQ [13] und CERRUTI [24] zurückgeht. Diese in den Jahren 1885 bzw. 1882 entwickelten Fundamentallösungen sagen einen für dreidimensionale Problemstellungen charakteristischen Abfall der Spannungen $\sigma_{ij} \sim 1/r^2$ voraus. Ebene Systeme zeigen hingegen ein anderes Verhalten. FLAMANT [28] untersuchte 1892 den *linienförmigen Kontakt*, der einen ebenen Verzerrungszustand (EVZ) hervorruft und bei jenem die Spannungen gemäß $\sigma_{ij} \sim 1/r$ abklingen. Zwei- und dreidimensionale Kontakte sind demnach grundsätzlich differenziert zu betrachten. Ein Teil dieser Arbeit behandelt die Fragestellung, inwieweit Brückenschläge zwischen beiden möglich sind, die dann äußerst gewinnbringend in numerischen Simulationsverfahren umgesetzt würden.

Aufbauend auf den Ergebnissen von HERTZ gelang HUBER [48] 1904 die explizite Berechnung des Spannungsfeldes im Inneren der Körper, dessen Kenntnis wesentliche Aussagen über den Fließbeginn zulässt. Entsprechendes für die Indentierung des Halbraums durch einen starren konischen Indenter geht auf SNEDDON [106] zurück (1948); das eigentliche Kontaktproblem wurde bereits 1939 von LOVE [65] gelöst.

Zeitgleich veröffentlichte STEUERMAN [113] einen Beitrag zum *konformen Kontakt*, der im Vergleich zum *kontraformen Kontakt* von HERTZ eine genauere Abbildung der Oberflächenform verlangt. SEGEDIN [103] lieferte 1957 die Beziehung zwischen Normalkraft und Eindrücktiefe unter Berücksichtigung der exakten Kugelform. Die von SNEDDON [107] zur Lösung des Halbraumkontaktes mit einem beliebig geformten Indenter axialsymmetrischen Profils 1965 herangezogenen Integraltransformationen, sollen auch in dieser Arbeit einen zentralen Platz einnehmen. In Verbindung mit der von PHARR et. al [88] erst 1992 nachgewiesenen und für alle axialsymmetrischen Indenterformen geltenden *universalen Kontaktsteifigkeit*

$$\frac{dP}{d\delta} = 2\tilde{E}a$$

stellen seine Resultate einen Meilenstein in den Werkstoffwissenschaften. Sie dienen noch heute der Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei *Härteprüfverfahren* im elastoplastischem Regime und gelten näherungsweise für die standardisierten VICKERS- und BERKOVICH-Indenter. Wesentlich ist obiger Zusammenhang aber noch aus einem ganz anderen Blickwinkel, denn es besteht eine direkte Analogie zu Eindruckversuchen in die sogenannte (eindimensionale) WINKLER-Bettung. Jene ist Grundlage einer modernen, äußerst effektiven Kontakt- und Reibungstheorie¹ – dazu später mehr.

Deutlichen Anteil an der theoretischen Entwicklung des *Tangentialkontaktes* besitzt MINDLIN [71], dem wir u.a. das Überlagerungsprinzip zur Spannungsberechnung im Falle von partiellem Gleiten verdanken.²

Möglichst verschleißbeständige Oberflächen werden häufig aus *inhomogenen elastischen Materialien* gefertigt, weshalb auch dieser Bereich zur aktuellen Forschung gehört [34]. Wichtige Beiträge das Verhalten inhomogener elastischer Materialien betreffend stammen zum Großteil aus der Geomechanik. Besonders erwähnenswert sind die um 1970 entstandenen mit dem Namen GIBSON verbundenen Veröffentlichungen [35, 36, 37, 5]. Speziell der linear-inhomogene, inkompressible Halbraum trägt

¹Diese Theorie wurde im Fachgebiet Systemdynamik und Reibungsphysik der TU-Berlin unter der Leitung von Prof. V.L. POPOV entwickelt und ist Gegenstand aktueller Forschung.

²In diesem Kontext ist auch CATTANEO zu erwähnen. CATTANEO 1938 und MINDLIN 1949 sollen diese Technik unabhängig voneinander gefunden haben.

verdient seinen Namen: „GIBSON-*Medium*“. Ihn kennzeichnen zwei besondere Merkmale, die u.a. für Reduktionszwecke von Bedeutung sein können:

Bei seiner Beanspruchung durch eine konstante streifenförmige bzw. axialsymmetrische Normaldruckverteilung ergeben sich

1. exakt die gleichen Spannungen wie im homogenen elastischen, inkompressiblen Halbraum,³
2. bleiben die Normalverschiebungen überall endlich! An der Oberfläche sind die Normalverschiebungen direkt proportional zur Normaldruckverteilung, verschwinden damit außerhalb des Kontaktgebietes – der Halbraum reagiert als WINKLER-Bettung!

GREEN-Funktionen für den inhomogenen Halbraum mit tiefenabhängigem E-Modul gemäß $E \sim z^\alpha$ für $0 < \alpha < 1$ leiteten BOOKER et al. [9] um 1985 her. Aktuelle Übersichten der bereits untersuchten Inhomogenitäten geben WANG et al. [117] und SELVADURAI [104] an.

Gleichwohl die von HERTZ entwickelten Lösungen für den elastischen Kontakt zweier Körper mit gekrümmten Oberflächen bereits über ein Jahrhundert bekannt sind, ließ die Erweiterung auf den *Kontakt mit Adhäsion* lange auf sich warten. Erst 1971 präsentierten JOHNSON, KENDALL und ROBERTS [55] eine Theorie – die JKR-Theorie –, die sich bis heute bewährt hat und primär Anwendung findet.⁴ In Verbindung mit den von MAUGIS et al. [70, 67, 68, 69] gefundenen Analogien zur *Bruchmechanik* ist die vorliegende Arbeit auf die JKR-Theorie eingeschränkt. In der Mikrosystemtechnik ist das Verstehen der Adhäsion grundlegend. Durch die voranschreitende Miniaturisierung von Bauteilen sowie immer glatteren Flächen erlangen Adhäsionseinflüsse große Bedeutung. Die Möglichkeit der Herstellung äußerst glatter Oberflächen verdanken wir dem großen Fortschritt im Bereich der Oberflächenbearbeitung, die dadurch auch wesentlich zur Entwicklung in der Computertechnologie beitrug/beiträgt; als Beispiel sei das chemisch-mechanische Polieren genannt, mit dessen Hilfe die Speicherkapazität von Festplatten stark erhöht wurde. Adhäsion spielt des Weiteren in der biologischen Mikrotribologie eine zentrale Rolle. Entscheidende Studien über die Haftmechanismen von Geckos sowie besonderer Insekten stammen erst aus diesem Jahrtausend [101, 31, 30, 111]. Man will von der Natur lernen, um so neuartige Materialien und Strukturen für industrielle Anwendungen zu schaffen.

1.1.2 Kontakt rauer Oberflächen

Die vorausgegangenen Theorien bezogen sich hauptsächlich auf den Einzelkontakt. In der Realität besitzen jedoch selbst hochpolierte Festkörperoberflächen Rauigkeiten, wenn man die Skala entsprechend klein wählt. Wie wichtig die Kenntnis der aus einer Vielzahl von Mikrokontaktflächen bestehenden realen Kontaktfläche ist, wurde eingangs erwähnt. Ihr Einflussbereich reicht beispielsweise vom Wärme- und Stofftransport über die Dichtigkeit einer Verbindung, den elektrischen Widerstand, bis hin zum Verschleiß.

Viele Kontakttheorien basieren auf den Einzelkontakt von HERTZ. In der Pionierarbeit von ARCHARD [4] 1957 ist eine Art fraktales Modell zu finden. ARCHARD füllte eine makroskopisch sphärische Kugelkappe vollständig mit kleineren auf, die dann wiederum mit noch kleineren besetzt wurde. Je weiter er diesem Mechanismus folgte, desto näher kam er einer Proportionalität von Normalkraft P und realer Kontaktfläche A_{real} . Solche wurde bereits 1939 von BOWDEN und TABOR [14] festgestellt, weshalb sie annahmen, dass sämtliche Mikrokontakte plastisch verformt seien. Dass dieser Zusammenhang (im Bereich kleiner Normalkräfte) aber ebenso für den elastischen Kontakt Gültigkeit besitzt, ist Ergebnis der meisten Kontakttheorien. Das auf das Jahr 1966 datierte Modell von

³Ein Teil dieser Erkenntnis geht auf LEKHNITSKII [63] zurück.

⁴Streng genommen ist sie gültig für große, weiche Kugeln [54].

GREENWOOD und WILLIAMSON [40] liefert bis auf einen schwachen logarithmischen Faktor jene Relation. Die Autoren modellierten die raue Oberfläche durch Kugelkappen mit gleichem Krümmungsradius, deren Höhen einer Normalverteilung nach GAUSS genügte. BUSH, GIBSON und THOMAS [18] konnten mit ihrer Theorie 1975 erstmalig eine strikte Linearität zwischen Normalkraft und Kontaktfläche für kleine Normalkräfte nachweisen. Gegenüber dem GREENWOOD-WILLIAMSON-Modell näherten sie die Rauheitshügel durch Kappen unterschiedlicher Krümmung an. Speziell die Abhängigkeit des Quotienten P/A_{real} von der mittleren quadratischen Steigung der Oberfläche und dem effektiven elastischen Modul unterscheidet sich nur um einen konstanten Faktor von der das letzte Jahrzehnt prägenden Theorie von PERSSON [82, 86, 83]. Diese berücksichtigt Rauigkeiten auf verschiedenen Skalen und wird häufig auf selbstaffine Oberflächen angewendet. War sie anfangs noch auf die Berechnung der realen Kontaktfläche für (visko-)elastische Materialien fixiert, so können heute Adhäsion, Dichtheit, Schmierung, Wärmetransport und vieles mehr abgebildet werden [83, 84, 87].

In jüngster Vergangenheit hat sich eine weitere auf einem revolutionären Ansatz beruhende Kontakttheorie herausgebildet, die sogenannte *Dimensionsreduktionsmethode*. Getreu der Namensgebung aller oben genannten Theorien, müsste sie eigentlich *Theorie von POPOV* heißen. Sie steht im Fokus der vorliegenden Arbeit und wird im nächsten Abschnitt kurz erläutert.

1.1.3 Dimensionsreduktionsmethode

Grundgedanke und zugleich Ursprung der *Dimensionsreduktionsmethode* ist die Tatsache, dass die globalen Relationen zwischen Normalkraft P , Eindringtiefe δ und Kontaktradius a für den HERTZschen Kontakt einer Kugel mit dem elastischen Halbraum ebensogut aus einem *eindimensionalen Modell* hervorgehen. Wie eingangs erwähnt, verhält sich die *dreidimensionale Kontaktsteifigkeit* proportional zum Radius des Kontaktes, eine Eigenschaft, die für eine eindimensionale WINKLER-Bettung charakteristisch ist.⁵ Lediglich eine Modifizierung der Stempelgeometrie ist erforderlich; der Krümmungsradius des zylindrischen Stempels ist halb so groß wie im Original zu wählen. Ähnliche Analogien bestehen zwischen der tangentialen 3D-Steifigkeit und der Quersteifigkeit der Federn einer WINKLER-Bettung.

Das eigentliche Ziel der Methode liegt in der Simulation des Reibkontaktes rauer Oberflächen unter Berücksichtigung ihrer Mehrskaligkeit. Dabei werden die gängigen Annahmen Quasistationarität sowie die Betrachtung der potenziellen Energie als lokale und der kinetischen Energie als globale Größe vorausgesetzt [94]. Desweiteren werden die einzelnen Mikrokontakte als unabhängig voneinander betrachtet.⁶ Die Erweiterung erfordert allerdings noch eine Umrechnungsformel zwischen zwei- und eindimensionalem Leistungsspektrum der Rauheiten, so dass die Kontakteigenschaften identisch sind. Diese geht auf GEIKE [32] zurück. In seinen numerischen Simulationen tritt an die Stelle des dreidimensionalen, elastischen Halbraums mit einer rauen zweidimensionalen Oberfläche lediglich eine eindimensionale Federschicht mit entsprechend modifizierter *rauer (Oberflächen-)Linie*. Trotz der enormen Einsparung an Freiheitsgraden und damit verbundener Rechenzeit, erzielte er hervorragende Resultate.

Die Erweiterung der Reduktionsmethode auf *viskoelastische* und *elastoplastische Materialien* bzw. auf *geschmierte Kontakte* einschließlich *Kavitation* ist ohne weiteres möglich [91]. In [33] wird sogar eine einfache Möglichkeit vorgestellt, wie man auf die Kontaktspannungsverteilung schließen kann. Eine effiziente Abbildung des *adhäsiven Kontaktes* ist noch nicht geglückt.

⁵Anstelle des Kontaktradius tritt die Kontakthalbbreite.

⁶Sowohl die Theorie von GREENWOOD und WILLIAMSON als auch die von BUSH und GIBSON enthalten diese Annahme!

1.2 Zielsetzung

Trotz des enormen Fortschritts in der Computertechnologie hinsichtlich Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit nehmen echte dreidimensionale Modelle in der Simulation sehr viel Rechenzeit in Anspruch. Das gilt übergreifend für alle naturwissenschaftlichen Disziplinen, weshalb in all jenen Reduktionsmodelle zur Anwendung kommen. Die Art der Reduktionen können dabei äußerst vielseitig ausfallen. Sie beruhen auf sinnvollen Annahmen wie z.B. oben genannte für typische tribologische Kontakte, die zunächst eine Entkopplung von Trägheits- und elastischen Eigenschaften zulassen [91]. Andere beinhalten eine Reduktion der Dimension, so kommen beispielsweise eindimensionale Strömungsnetzwerke zur Abbildung von dreidimensionalen Strömungsfeldern innerhalb von Triebwerkskomponenten zum Einsatz. Alle sinnvollen Reduktionen genügen dem von EINSTEIN 1920 zur Modellbildung geäußerten Zitat:

„So einfach wie möglich, aber nicht einfacher!“

Die hier vorliegende Arbeit zielt primär darauf ab, dreidimensionale Kontaktprobleme auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension *exakt* abzubilden. Das obige Zitat müsste dementsprechend lauten:

„So einfach wie möglich, dabei dennoch exakt!“

Das Wort „*exakt*“ meint „*exakt im Rahmen einer dreidimensionalen Theorie*“, die ihre Berechtigung zur Beschreibung eines realen Kontaktproblems besitzt. Exemplarisch sei die diskutierte Abbildung des HERTZschen Kugelkontaktes auf den Eindruck eines zylindrischen Stempels in eine uniaxiale, elastische Schicht wiederholt genannt. Sie genügt diesem Grundprinzip, da die dreidimensionalen $P - \delta - a$ Zusammenhänge mittels einfacher Halbierung des Krümmungsradius reproduziert werden. Natürlich ist damit der fundamentale Baustein gesetzt, denn viele Theorien gehen von der Näherung der Oberflächenform durch Funktionen 2. Grades aus. Der analytische Beweis verlangt bei bekannten HERTZschen Formeln lediglich eine einfache Handrechnung.

Lässt sich ein solcher Beweis auch für beliebig geformte, axialsymmetrische Oberflächen finden und falls ja, wie müsste die Form modifiziert werden? Mit dieser Fragestellung beschäftigt sich das **Kapitel 2**. Jene Überführung würde bedeuten, dass beliebige **kontraforme** und **konforme Kontakte** durch ein einfaches System exakt abbildbar wären, was erhebliche Vorteile in der Modellbildung von technischen Kontakten einbrächte.

Die Spannungen innerhalb einer WINKLER-Bettung verändern sich proportional zur Oberflächenverschiebung. Die Kontaktspannungen eines dreidimensionalen Kontaktes hingegen nicht. Diesbezüglich ist die Reduktion falsch, möglicherweise können diese Informationen aber durch geeignete Reformulierung von Spannungen zurückgewonnen werden, so geschehen in der Arbeit von Geike [32] für den HERTZ-Kontakt. Existiert ein universelles Verfahren zur **Rückgewinnung von Kontaktspannungen** aus dem 1D-Modell für alle beliebig geformten, axialsymmetrischen Kontakte? Dieser Frage geht **Anhang C.2** nach, wobei die Theorie mit einem interessanten Anwendungsbeispiel belegt wird.

Kapitel 2 zeigt weitere Konzepte auf, die den Erhalt der Spannungsverteilung ermöglichen. Solche Fragestellungen sind keineswegs trivial, denn sind wir ehrlich, wer kennt schon die Spannungsverteilung für beliebig geformte axialsymmetrische Kontakte?⁷ Auch aus diesem Grunde beginnt Kapitel 2 mit der Aufarbeitung des vollständigen, axialsymmetrischen Kontaktproblems auf Basis der klassischen Elastizitätstheorie. Dazu gehören neben den Spannungen und Verschiebungen an der

⁷Die Kenntnis der HERTZschen Pressung oder der Spannungsverteilung unterhalb eines flachen zylindrischen Stempels ist den meisten geläufig. Aber welche Spannungsverteilung ergibt sich für den Halbraumkontakt mit der so einfachen Geometrie eines konischen Indenters?

Oberfläche auch die Bestimmungsgleichungen für die Feldgrößen im Inneren des Halbraums. Deren Formulierung erfolgt auf Basis von Integraltransformationen, wobei ich vielerlei Informationen aus den Werken von Sneddon [105, 107, 108, 109] entnehme. Entsprechende Gleichungen für zweidimensionale Kontaktprobleme⁸ sind in **Anhang B** aufgelistet. Es sei vorweggenommen, dass zwischen den Bestimmungsgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen im ebenen und axialsymmetrischen Fall Forminvarianzen bestehen. Auf dessen Grundlage wird versucht, ein **Korrespondenzprinzip** zu entwickeln, welches der **exakten Umrechnung planarer in axialsymmetrische Felder** dient. Dies würde bedeuten, dass sogar die Feldgrößen im Inneren des dreidimensionalen Körpers durch eine Dimensionsreduktion von 3 auf 2 exakt zugänglich wären. Das klingt zunächst nach einer ganz gewöhnlichen Aufgabe, die eigentlich schon gelöst sein müsste, da so viele zweidimensionale Modelle zur Simulation von dreidimensionalen tribologischen Systemen in der Praxis Anwendung finden. Das ist aber nicht der Fall und jene Modelle sind entweder nicht an den Feldgrößen im Inneren interessiert oder nehmen einen Fehler in Kauf.⁹ Die Schwierigkeiten liegen in den eingangs erwähnten grundsätzlich unterschiedlichen Verhaltensweisen zwei- und dreidimensionaler Systeme (BOUSSINESQ & CERRUTTI vs. FLAMANT). Abschließend wird eine Verbindung zwischen ein- und zweidimensionalem Reduktionsmodell präsentiert.

Das **Kapitel 3** beschäftigt sich mit der exakten Abbildung des axialsymmetrischen **Kontaktes mit Adhäsion**. Aufbauend auf den Resultaten von Kapitel 2 soll die Abbildung wiederum sowohl die globalen Relationen zwischen Normalkraft P , Eindringtiefe δ und Kontaktradius a umfassen als auch die Spannungsverteilungen an der Oberfläche bzw. die Feldgrößen im Inneren einschließen. Als abzubildende Adhäsionstheorie wird die von JOHNSON, KENDALL und ROBERTS [55] angesetzt. Sollte jenes Ziel gelingen, so könnte damit das Simulationsverfahren der Dimensionsreduktion von POPOV/GEIKE auf den adhäsiven Kontakt erweitert werden. Ebenso würden sich erhebliche Vereinfachungen in der Modellierung von biologischen Haftmechanismen ergeben, bei denen die **Konformität des Kontaktes** eine große Rolle spielt.

Es ist allgemein bekannt, dass die Spannungen und Verschiebungen im Unendlichen des elastischen Halbraums bei einem punktförmigen Kontakt verschwinden. Das gilt bezüglich der Verschiebungen weder für den linienförmigen Kontakt noch für die halbbunendliche elastische Scheibe. Auch fallen die Spannungen nach einer anderen Charakteristik ab. Dies führte zur Idee¹⁰, die Verschiebungen im ebenen System durch einen mit der Tiefe zunehmenden E-Modul zu begrenzen. Insbesondere das Verhalten des **linear-inhomogenen, inkompressiblen Halbraums** als WINKLER-Bettung verspricht einiges Potenzial hinsichtlich einer sinnvollen Reduktion der räumlichen Dimension – man erinnere sich an das eingangs erwähnte GIBSON-*Medium*. In welchem Maße tatsächlich solche Reduktionen möglich sind, darüber gibt **Kapitel 4** Aufschluss. Es umfasst sowohl den **Normal-** als auch **Tangentialkontakt**.

Zur Simulation tribologischer Systeme kommen je nach Problemstellung unterschiedliche Verfahren zum Einsatz, als Beispiele seien Zelluläre Automaten [74, 95], molekulardynamische Modelle [123, 124], die Finite-Elemente-Methode [49, 50] oder aber auf GREEN-Funktionen basierende Verfahren (Randelemente-Methode) [12, 22] erwähnt. Ein Teil der Verfahren nutzt „*Elastische Gittermodelle*“. Um solche geht es in **Kapitel 5**, speziell deren Güte, das Verhalten eines **isotropen, linear-elastischen Kontinuums** möglichst genau wiederzugeben. Das beinhaltet zwar auch eine Art Reduktion (Kontinuum \mapsto Massenpunktsystem), die aber nichts mit den vorherigen gemein hat. Dennoch sind solche im Rahmen der Dimensionsreduktionsmethode von Interesse, da man beispielsweise ein zweidimensionales Kontinuum dazu benötigt, die Feldgrößen im (dreidimensionalen) Halbraum abzubilden.¹¹ Der Großteil umfasst die Aufarbeitung bestehender Literatur, dabei

⁸Ebene Verzerrungs- bzw. Spannungszustände sind gemeint!

⁹Bei der Komplexität von Kontakten mit rauen Oberflächen völlig berechtigt.

¹⁰Diese Idee stammt von V.L. POPOV!

¹¹In den Kapiteln 2 und 3 werden dazu die FOURIER-Integrale numerisch mit Hilfe von MATHEMATICA gelöst.

wird zwischen Modellen mit zentralen Wechselwirkungen zu ersten und zweiten Nachbarn [100], den BORN-Modellen [10], Modellen nach KIRKWOOD [60] sowie MCA-Modellen mit effektiver Bindung [93] unterschieden. Für all jene wird die **Isotropie** auf gemeinsamer Grundlage eines quadratischen Gitters hinsichtlich **kinematisch-dynamischer** und **energetischer Aspekte** diskutiert. Einige numerische Ergebnisse mit der *Matrizen-Verschiebungsmethode* nehmen sich der **Randproblematik ebener Systeme** an.

Auch in **Kapitel 6** erfolgt eine Reduktion, bedingt sogar eine Art Dimensionsreduktion. Allerdings weicht jene ebenfalls vom Grundprinzip dieser Arbeit ab, dreidimensionale Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension *exakt* abbilden zu wollen. Es geht vielmehr um sogenannte **hierarchische Gittermodelle**, die abgesehen von einer sehr fein diskretisierten Oberflächenschicht, eine in der Tiefe sukzessive Vergrößerung beinhalten. Dies gestattet die folgende Überlegung: Raue Oberflächen besitzen Wellenlängen auf verschiedenen Skalen. Bei einem Kontaktproblem solcher hängt die Reichweite des Deformationsfeldes von der Wellenlänge der Rauigkeit ab ($z \sim \lambda$). Demzufolge klingen kurzwellige Anteile sehr schnell ab, so dass im Inneren gröber diskretisiert werden darf. Das hat eine enorme Einsparung an Freiheitsgraden zur Folge, ohne die Genauigkeit der Ergebnisse zu gefährden. Das hier verwendete hierarchische System wandelt allerdings von der Struktur und auch in Verbindung mit weiteren Einschränkungen an der Grenze des von EINSTEIN geäußerten Zitats (*...aber nicht einfacher!*). Inwieweit man dennoch gute Resultate für den Kontakt von rauen Oberflächen erzielen kann, obliegt einer Prüfung. Speziell der **Kontakt selbstaffiner Oberflächen** wird numerisch hinsichtlich **Kontaktfläche**, **Druckverteilung**, **relative Annäherung der Oberflächen** sowie **Topographie** und **Dichtheit auf verschiedenen Skalen** untersucht, dabei u.a. mit den Ergebnissen des vielmehr Freiheitsgrade umfassenden hierarchischen Systems von YANG [122] sowie anderer numerischer Verfahren verglichen und auf die Theorie von Persson [82, 83] eingegangen.

Kapitel 2

Abbildung des elastischen Kontaktes axialsymmetrischer Indenter beliebigen Profils mittels Dimensionsreduktion

Nachfolgende theoretische Untersuchungen beschäftigen sich mit der Fragestellung, inwieweit *einfache Modelle* die Eigenschaften des Kontaktes beliebig geformter axialsymmetrischer Indenter mit dem elastischen Halbraum wiedergeben können. Das klingt zunächst nach einer völlig gewöhnlichen Aufgabe, welcher sich zahlreiche Wissenschaftler bereits vor mir gewidmet haben. Keines der Vielzahl existierender Modelle kann jedoch sämtliche Kontakteigenschaften *exakt* abbilden. Dieses Ziel ist Gegenstand der Arbeit, wobei die sogenannte *Reduktionsmethode*¹ zum Einsatz kommen wird. Eine Aufarbeitung der theoretischen Grundlagen des elastischen Kontaktes ist zum Auffinden solcher Modelle zwingend erforderlich und kann ggf. vom Leser übersprungen werden (Kap. 2.1 Seiten 9 - 15).

Der Großteil des Kapitels bezieht sich auf die Reduktion von 3D auf 1D; die korrekte Abbildung der 3D-Kontaktspannungen durch ein 2D-Modell in Kap. 2.3.2 Seiten 22 - 27 spielt eine untergeordnete Rolle, da jenes Ziel ebensogut durch eine elegante Anbindung an ein eindimensionales Modell realisierbar ist.

Auch die exakte Abbildung der Feldgrößen im Inneren des Halbraumes wird analysiert; vorerst werden nur Kontakte *ohne Adhäsion* betrachtet.

2.1 Dreidimensionales Kontaktproblem

In diesem Kapitel wird zunächst das dreidimensionale Normalkontaktproblem zwischen einem starren, axialsymmetrischen Indenter und dem linear elastischen Halbraum diskutiert. Die Geometrie des Indenters wird dabei als bekannt vorausgesetzt. Beim elastischen Eindruckversuch schmiegt sich der Festkörper bis zu einem bestimmten Kontaktradius a an den Indenter an. Innerhalb des Kontaktgebietes sollen alle Schubspannungen verschwinden. Die Randbedingungen werden nach Theorie 1.Ordnung am unverformten System ausgewertet. Das spezielle Kontaktproblem ist graphisch in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

¹siehe Einleitung!

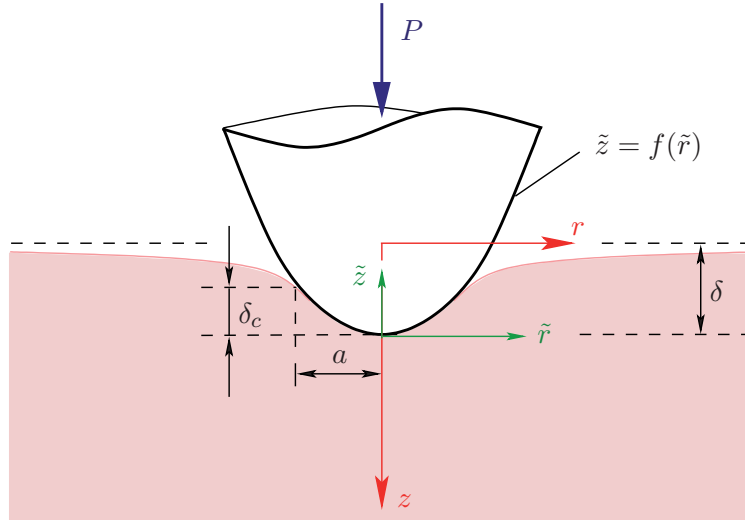


Abbildung 2.1: Starrer, axialsymmetrischer Indenter in Kontakt mit elastischem Halbraum

Die Einhüllende $f(\tilde{r})$, welche die Indentergeometrie widerspiegelt, wird dabei in den zylindrischen Koordinaten \tilde{r} und \tilde{z} angegeben². Vertikalverschiebungen orientieren sich hingegen an der globalen Koordinate z . Die (maximale) Eindringtiefe wird mit δ bezeichnet. δ_c misst den Abstand von der Indenterspitze bis hin zum Punkt, wo sich das Kontinuum vom Indenter ablöst

$$\delta_c := f(r = a) . \quad (2.1)$$

Die Bestimmung der Spannungsverteilung für das vorliegende Kontaktproblem geht auf BOUSSINESQ [13] zurück. Die gemischten Randbedingungen sind nachfolgend aufgeführt.

$$u_z(r, 0) = \delta - f(r) \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.2)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0 \quad \text{für} \quad r > a \quad (2.3)$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = 0 \quad \text{für} \quad r \geq 0 \quad (2.4)$$

Desweiteren müssen sämtliche Spannungen und Verschiebungen im “Unendlichen” verschwinden!

2.1.1 Grundgleichungen der Elastostatik

Die Berechnung der Spannungen \mathbf{S} , Deformationen \mathbf{D} und Verschiebungen \mathbf{u} innerhalb eines elastischen Körpers ist die Hauptaufgabe der Elastostatik. Im Rahmen der klassischen Elastizitätstheorie werden verschiedene Einschränkungen gemacht, die in der Folge kurz erläutert werden. Zunächst sollen Informationen aus dem Kräfte- und Momentengleichgewicht wiederholt werden.

Die auf einen Körper wirkenden Kräfte können sowohl an seiner Oberfläche als auch an jedem Volumenelement angreifen. Letztere heißen Volumenkräfte und werden durch eine volumenhafte Fernwirkung von Feldern (Gravitationsfelder, Magnetfelder) verursacht. Im Gleichgewicht muß die Summe aller Kräfte am Gesamtkörper auf den Nullvektor führen. Diese Bedingung gilt ebenso für jeden herausgeschnittenen Teilkörper und lautet speziell für ein infinitesimales Volumenelement

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} . \quad (2.5)$$

²Die Radialkoordinaten \tilde{r} und r sind identisch

Hierin stellt \mathbf{S} den CAUCHYSchen Spannungstensor und \mathbf{f}_v die Volumenkraftdichte dar. Das Momentengleichgewicht führt bei Annahme eines gewöhnlichen Kontinuums, d.h. bei fehlenden Momentenspannungen, auf die Symmetrie des Spannungstensors

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \quad (2.6)$$

Außerdem wird eine kinematisch linearisierte Theorie vorausgesetzt, wonach die Verzerrungen proportional zu den Verschiebungsableitungen sind

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2} [\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}\nabla)] \approx \frac{1}{2} (\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}) =: \mathbf{D}. \quad (2.7)$$

Die Gleichung (2.7), in welcher der GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{G} in den Deformator \mathbf{D} übergeht, heißt auch Verschiebungs-Verzerrungs-Relation.

Weiteren Restriktionen unterliegt das Stoffgesetz. Es wird von einem homogenen, nicht alternden, isotropen Stoff ohne Geschichte ausgegangen sowie Linearität zwischen den CAUCHYSchen Spannungen und infinitesimalen Verzerrungen angenommen. Das Material gehorcht demnächst dem HOOKEschen Gesetz, welches nachfolgend in verzerrungsexpliziter Schreibweise aufgeführt ist³.

$$\mathbf{S} = 2G \left[\mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{I} \right] \quad (2.8)$$

In der konstitutiven Gleichung (2.8) treten zwei Materialkonstanten auf. Sowohl die Querkontraktionszahl ν als auch der Schubmodul G müssen aus Messungen ermittelt werden.

Mit den 3 Gleichgewichtsbedingungen (2.5), den 6 Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen (2.7) und den 6 Materialgleichungen (2.8) stehen insgesamt 15 Gleichungen zur Bestimmung von 15 unbekanntem Größen zur Verfügung (3 Verschiebungen, 6 Verzerrungen, 6 Spannungen)⁴. Dieses Gleichungssystem kann man mittels Elimination von Spannungen und Verzerrungen vereinfachen, so dass eine vektorwertige Gleichung verbleibt, die lediglich den unbekanntem Verschiebungsvektor enthält⁵. Innerhalb des elastischen Körpers muß der Verschiebungsvektor dieser nach NAVIER benannten Differenzialgleichung genügen. Unter Annahme verschwindender Volumenkräfte lautet sie

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Eine elegante Methode zur Lösung der NAVIERSchen Gleichungen (2.9) wird im nächsten Abschnitt erläutert.

2.1.2 Darstellung über Verschiebungsfunktion

Die Lösung der NAVIER-CAUCHY-Gleichung erfolgt meist nicht auf direktem Wege. Sie wird vielmehr zunächst durch Einführung sogenannter Verschiebungsfunktionen in Potential- bzw. Bipotentialgleichungen überführt, deren Lösungen bereits in großer Anzahl bekannt sind. Die eigentlichen Verschiebungskomponenten gehen dann aus Kombinationen von partiellen Ableitungen der Verschiebungsfunktionen hervor. Ein in der Literatur häufig anzutreffender allgemeiner Lösungsansatz geht auf den HELMHOLTZschen Satz zurück. Hiernach wird der Verschiebungsvektor additiv in einen wirbelfreien

³Hierbei wurden isotherme Prozesse vorausgesetzt.

⁴Die Symmetrie von \mathbf{S} und \mathbf{D} ist bereits eingearbeitet.

⁵Eine andere Methode ist die Elimination von Verschiebungen und Verzerrungen, was auf die BELTRAMI-MICHELLSchen Gleichungen führt, welche sechs Differentialgleichungen für die Spannungen beinhalten. Dabei müssen im Gegensatz zur Formulierung über die Verschiebungen die sogenannten Verträglichkeitsbedingungen genutzt werden.

und einen quellfreien Anteil zerlegt (KELVINSche Zerlegung), zu deren Darstellung ein skalar- und ein vektorwertiges Potential benötigt wird. Weitere allgemeine Ansätze wurden von PAPKOVICH und NEUBER sowie GALERKIN eingeführt. Letztgenannter definierte den Verschiebungsvektor wie folgt

$$\mathbf{u} = 2(1 - \nu) \Delta \mathbf{Z} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{Z}, \quad (2.10)$$

wobei der sogenannte Galerkinsche Vektor \mathbf{Z} der Bipotentialgleichung

$$\Delta \Delta \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

genügt. Demnach kann jede biharmonische Vektorfunktion als GALERKIN Vektor herangezogen werden. Der zugehörige Verschiebungsvektor \mathbf{u} , welcher nach (2.10) über die zweiten Ableitungen von \mathbf{Z} gebildet wird, ist dann automatisch Lösung der NAVIER-CAUCHY-Gleichung (2.9). Im Hinblick auf die Untersuchung axialsymmetrischer Kontaktprobleme soll hier der Sonderfall des GALERKIN Vektors diskutiert werden, bei welchem zwei seiner drei skalarwertigen Komponenten verschwinden

$$Z_x = Z_y = 0, \quad \implies \quad \mathbf{Z} = Z_z \mathbf{e}_z. \quad (2.12)$$

Dadurch wird (2.11) auf eine skalare Bipotenzialgleichung reduziert

$$\Delta \Delta Z_z = 0, \quad (2.13)$$

jedenfalls solange z eine geradlinige Koordinate beinhaltet, was bei Zugrundelegung von Zylinderkoordinaten r, φ, z gewährleistet ist. Eine zusätzliche Beschränkung auf Rotationskörper, welche einer zur Drehachse symmetrischen Belastung ausgesetzt sind, gilt

$$Z_z = Z_z(r, z). \quad (2.14)$$

Dieses Problem wurde erstmalig von LOVE [64] gelöst, lange bevor der allgemeine Ansatz von GALERKIN entdeckt wurde. Die Funktion

$$L(r, z) := 2GZ_z(r, z) \quad (2.15)$$

wird daher auch LOVESche Verschiebungsfunktion genannt. Durch Einsetzen von (2.15) in (2.10) können die von Null verschiedenen Verschiebungskomponenten über L ausgedrückt werden

$$2Gu_r = -\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} \quad (2.16)$$

$$2Gu_z = \left[2(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] L. \quad (2.17)$$

Unter Berücksichtigung der Verschiebungs-Verzerrungsgleichungen sowie des HOOKESchen Gesetzes werden nun mit Hilfe von (2.16) und (2.17) die verbleibenden Spannungen als Funktion der noch unbekanntenen Verschiebungsfunktion formuliert

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) L \quad (2.18)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) L \quad (2.19)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] L \quad (2.20)$$

$$\tau_{zr} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] L. \quad (2.21)$$

Die größte Schwierigkeit liegt zumeist darin, die speziellen Randbedingungen zu erfüllen. In dieser Arbeit steht die Berechnung der elastischen Felder im unendlichen Halbraum im Vordergrund. Hat man es mit einem solchen zu tun, bildet die mehrfache FOURIER-Transformation eine effektive Lösungsmethode. Sie ist Gegenstand des nächsten Kapitels.

2.1.3 Lösung mittels HANKEL-Transformation für den axialsymmetrischen Fall

Die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von Integraltransformationen basiert zum einen auf der *Trennung von Variablen*⁶. Andererseits darf aufgrund der Linearität von Potenzialgleichungen das *Superpositionsprinzip* angewendet werden. Während ebene Probleme mit der einfachen FOURIER-Transformation gelöst werden, nutzt man bei dreidimensionalen axialsymmetrischen Aufgaben die HANKEL-Transformation⁷. Die HANKEL-Transformation n -ter Ordnung einer Funktion $f(x)$ ist wie folgt definiert

$$\bar{f}_n(\xi) \equiv \mathcal{H}_n[f(x); \xi] := \int_0^{\infty} x f(x) J_n(\xi x) dx. \quad (2.22)$$

Hierin stellt J_n die Besselfunktion 1. Art der Ordnung n dar, welche über die unendliche Reihe

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}}{j! \Gamma(j+n+1)} \quad (2.23)$$

$$\text{mit } \Gamma(y) = \int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} dt \quad \text{für } y > 0$$

definiert ist. Die zugehörige inverse HANKEL-Transformation lautet

$$f(x) \equiv \mathcal{H}_n^{-1}[\bar{f}_n(\xi); x] := \int_0^{\infty} \xi \bar{f}_n(\xi) J_n(x\xi) d\xi, \quad (2.24)$$

d.h. zwischen den Operatoren der Hin- und Rücktransformation gilt $\mathcal{H}_n^{-1} = \mathcal{H}_n$. Mit Hilfe der HANKEL-Transformation 0-ter Ordnung bezüglich der Radialkoordinate r kann die Bipotenzialgleichung (2.13) in eine gewöhnliche Differentialgleichung in z überführt werden. Unter Beachtung der Formulierung (2.15) ergibt sich die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2\right)^2 \int_0^{\infty} r L(r, z) J_0(\xi r) dr = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2\right)^2 \bar{L}_0(\xi, z) = 0, \quad (2.25)$$

deren Einfachheit ein Resultat des modifizierten LAPLACE-Operators Δ_A ist. Seine Definition kann Anhang A.1, Gleichung (A.2) entnommen werden. Hierin sind zudem die HANKEL-Transformierten einiger spezieller Funktionsableitungen aufgeführt (Gleichungen (A.3)), die im weiteren gebraucht werden. Für eine umfassende Darstellung der Eigenschaften verschiedener Integraltransformationen mit ausgewählten Anwendungsbeispielen sei auf [105] bzw. [108] verwiesen. Die allgemeine Lösung von (2.25) kann mit einem EULERSchen Ansatz leicht berechnet werden. Unter Berücksichtigung von Doppelnulstellen nimmt jene folgende Gestalt an

$$\bar{L}_0(\xi, z) = (A + B\xi z)e^{-\xi z} + (C + D\xi z)e^{\xi z}. \quad (2.26)$$

Die enthaltenen im allgemeinen von ξ abhängigen Konstanten $A - D$ werden aus den Randbedingungen bestimmt. Dazu sind zunächst sämtliche Spannungen und Verschiebungen über die HANKEL-Transformierte der LOVESchen Verschiebungsfunktion auszudrücken. Das geschieht mittels Anwendung der HANKEL-Transformation auf (2.16)-(2.21), wobei geeignet zwischen 0-ter und 1-ter

⁶In diesem Zusammenhang ist beispielsweise der Produktansatz von BERNOULLI zu nennen.

⁷Die HANKEL-Transformation ist dabei nichts anderes als eine mehrfache FOURIER-Transformation, welche mittels Zylinderkoordinaten geeignet umgeformt wird.

Ordnung zu wählen ist. Die ebenfalls in den Frequenzbereich überführten Randbedingungen liefern dann die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten. Die Eigenschaft, dass alle Spannungen und Verschiebungen im Unendlichen verschwinden müssen, verbietet den zweiten Lösungsanteil. Die verbleibenden beiden Konstanten ergeben sich aus (2.2) und (2.4) zu

$$\begin{aligned} A(\xi) &= -\frac{2\nu G}{1-\nu} \frac{\bar{u}_0(\xi)}{\xi^2} \\ B(\xi) &= -\frac{G}{1-\nu} \frac{\bar{u}_0(\xi)}{\xi^2} \\ \text{mit } \bar{u}_0(\xi) &:= \mathcal{H}_0[\delta - f(r); \xi] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Transformierte der gegebenen Oberflächenverschiebung \bar{u}_0 hängt mit der Transformierten der gesuchten Druckverteilung unterhalb des Indenters wie folgt zusammen

$$\bar{p}_0(\xi) = \frac{G}{1-\nu} \xi \bar{u}_0(\xi). \quad (2.28)$$

TERAZAWA [114] untersuchte die inverse Problemstellung, nämlich welche Verschiebungen und Spannungen sich bei unterschiedlicher axialsymmetrischer normaler Oberflächenbelastung $p(r)$ ergeben. So erhielt er die transformierte Verschiebungsfunktion \bar{L}_0 in Abhängigkeit von $\bar{p}_0(\xi)$ auf direktem Wege, welche sich selbstverständlich auch für das hier vorliegende Problem ergibt, wenn man (2.28) verwendet

$$\bar{L}_0(\xi, z) = -\frac{1}{\xi^3} \bar{p}_0(\xi) (2\nu + \xi z) e^{-\xi z}. \quad (2.29)$$

Einsetzen von (2.29) in die hankeltransformierten Felder und anschließende Rücktransformation liefert das Spannungs- und Verschiebungsfeld in integraler Darstellung

$$2Gu_r(r, z) = -\int_0^\infty (1 - 2\nu - \xi z) \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} J_1(\xi r) d\xi \quad (2.30)$$

$$2Gu_z(r, z) = \int_0^\infty [2(1 - \nu) + \xi z] \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi \quad (2.31)$$

$$\sigma_{rr}(r, z) = -\int_0^\infty \xi(1 - \xi z) \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi + \frac{1}{r} \int_0^\infty (1 - 2\nu - \xi z) \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} J_1(\xi r) d\xi \quad (2.32)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, z) = -2(1 + \nu) \int_0^\infty \xi \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} \quad (2.33)$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = -\int_0^\infty \xi(1 + \xi z) \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi \quad (2.34)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = -z \int_0^\infty \xi^2 \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} J_1(\xi r) d\xi. \quad (2.35)$$

Ausgehend von den Gleichungen (2.30)-(2.35) verifizierte SNEDDON [107] den Zusammenhang von Normalkraft zu Eindringtiefe für axialsymmetrische Indenter beliebiger Einhüllenden. Dazu machte er nach Einführung von dimensionslosen Variablen $x := \frac{r}{a}$ und $\zeta := \xi a$ für die Transformierte der Normaldruckverteilung den Ansatz

$$\bar{p}_0(\zeta) := \frac{Ga}{1-\nu} \int_0^1 \chi(t) \cos(\zeta t) dt, \quad (2.36)$$

welcher die Randbedingung (2.3) automatisch erfüllt. Gleichung (2.2) unter Verwendung von (2.31) sowie der im Anhang A.2 aufgeführten Relation (A.12) stellt eine Bestimmungsgleichung für $\chi(t)$ bereit

$$\int_0^x \frac{\chi(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = \delta - f(x), \quad (2.37)$$

die nach Anwendung der ABEL-Rücktransformation auf

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\delta - f(x))}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.38)$$

führt. Mit der Kenntnis von (2.38) können nun u.a. Ausdrücke für die Eindrücktiefe δ sowie die Normalkraft P in Abhängigkeit der Formfunktion $f(x)$ abgeleitet werden. Unter der Voraussetzung, dass die Oberflächen am Rande des Kontaktes "kontinuierlich" (tangential) auseinanderlaufen, also die Verschiebungen differenzierbar sind, muss nach BOUSSINESQ die Bedingung $\chi(t=1) = 0$ erfüllt sein. Der Kontakt eines starren Indenters konvex geformter Oberfläche mit dem elastischen Halbraum zählt zu dieser Klassifizierung, bei jener die Größe der Kontaktregion von der Normalkraft abhängig ist und die Normalspannung am Rande des Kontaktes gegen Null strebt⁸. Die in [107] und [109] nach einigen Umformungen entwickelten Bestimmungsgleichungen für die Eindrücktiefe bzw. die Normalkraft lauten

$$\delta = \int_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \underbrace{\frac{\pi}{2}\chi(1)}_{=0} \quad (2.39)$$

$$P = \frac{4Ga}{1-\nu} \int_0^1 \left[\delta - t \int_0^t \frac{f'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \right] dt = \frac{4Ga}{1-\nu} \left[\int_0^1 \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \underbrace{\frac{\pi}{2}\chi(1)}_{=0} \right]. \quad (2.40)$$

Vor einer näheren Untersuchung der Spannungen und Verschiebungen soll im nächsten Abschnitt die Berechnung der genannten globalen Größen δ und P im Vordergrund stehen.⁹

2.1.4 Kontaktkraft und Eindrücktiefe bei einem Polynom n -ten Grades als Formfunktion

Die abgeleiteten Formeln für die Kontaktkraft und Eindrücktiefe enthalten lediglich die Formfunktion des Indenters als unbekannte Größe. Um möglichst viele rotationssymmetrische Indentergeometrien auf einmal zu erschlagen, wird zunächst ein Polynom n -ten Grades (mit $n \rightarrow \infty$) als Einhüllende angesetzt und hieraus auf Spezialfälle wie beispielsweise den konischen oder parabolischen Indenter im Anschluß eingegangen

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^n x^n. \quad (2.41)$$

⁸Als Gegenbeispiel sei der Kontakt eines flachen, starren Indenters mit dem Halbraum genannt. Hierbei befindet sich stets die gesamte Stirnfläche in Kontakt, wobei an ihrem Rande eine Singularität in den Normalspannungen auftritt.

⁹Obwohl der zusätzliche Starrkörpertranslationsanteil $\chi(1)$ in diesem Kapitel verschwindet, möchte ich ihn in entscheidenden Formeln mitführen. Dieses erleichtert eine spätere Verallgemeinerung des Reduktionsverfahrens auf den *adhäsiven Kontakt* (siehe Kapitel 3)!

Die darin enthaltenen Koeffizienten c_n stellen geometrieabhängige Vorfaktoren dar. Einen solchen Ansatz nutzte erstmalig SEGEDIN [103] im Rahmen der Untersuchung des Kontaktes eines sphärischen Indenters mit dem elastischen Halbraum, wobei er die Einhüllende durch ihre TAYLOR-Reihe ersetzte. Für die Indentergeometrie nach (2.41) ergeben sich unter Nutzung des Hilfsintegrals (A.17) sowie der Einführung des effektiven elastischen Moduls $\tilde{E} := \frac{E}{1-\nu^2}$

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})} c_n a^n \quad (2.42)$$

$$P = \sqrt{\pi} \tilde{E} a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})} c_n a^n. \quad (2.43)$$

Eindrücktiefe und Normalkraft für eine Potenzfunktion charakterisiert über ein einziges n gehen als Sonderfall aus diesen Beziehungen hervor. Dazu ist lediglich die Summe zu entfernen, wie es der Ansatz (2.41) bereits impliziert. Hierin ist u.a. der HERTZsche Kontakt [45] enthalten; setzt man $n = 2$ und drückt den Koeffizienten c_2 über den Krümmungsradius der Kugel R nach $c_2 := \frac{1}{2R}$ aus, ergeben sich die bekannten Formeln

$$\delta = \frac{a^2}{R} \quad (2.44)$$

$$P = \frac{4}{3} \tilde{E} R^{-1} a^3. \quad (2.45)$$

Für solche *reinen* Indentergeometrien gelten demnach die Zusammenhänge $\delta \propto a^n$ und $P \propto a^{n+1}$, welche von fundamentaler Bedeutung sind, denn jene erlauben eine interessante Reduktion der Problemstellung unabhängig von der Potenz n . Welchen Besonderheiten diese Reduktion unterliegt, ist Gegenstand des nächsten Kapitels.

2.2 Eindimensionales Ersatzmodell

Die Formulierung eines vereinfachten Ersatzmodells für den dreidimensionalen Kontakt zwischen einem starren Indenter und dem elastischen Halbraum stellt die Aufgabe dieses Abschnitts dar. Dabei sei zu Beginn darauf hingewiesen, dass ein eindimensionales Ersatzmodell natürlich mit einem Verlust an Informationen einhergeht. So können weder die Spannungen noch die Verschiebungen innerhalb des dreidimensionalen Kontinuums wiedergegeben werden. Bei zahlreichen Kontaktproblemen ist man jedoch nur an den makroskopischen Größen P und δ interessiert, welche der Berechnung auch nach geeigneter Reduktion zugänglich sind. Entgegen der induktiven Vorgehensweise, für die eine anfängliche Beschreibung des reduzierten Systems vordergründig wäre, soll die Struktur des reduzierten Abbilds sukzessive aus dem Formelapparat des Originals gefiltert werden.

2.2.1 Erkenntnisse aus Kontaktkraft und Eindrücktiefe nach SNEDDON

In Abschnitt 2.1.3 wurden basierend auf der Theorie von SNEDDON Bestimmungsgleichungen für die Eindringtiefe und Normalkraft in Abhängigkeit der Formfunktion $f(x)$ angegeben. Ausgangspunkt sei der erste Teil der Gleichung (2.40), welcher nach Einsetzen der Formfunktion (2.41) in

$$P = \frac{4Ga}{1-\nu} \int_0^1 \left[\delta - t \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc_n a^n x^{n-1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \right] dt \quad (2.46)$$

übergeht. Die Anwendung des Hilfsintegrals (A.17) und die Berücksichtigung der berechneten Eindrücktiefe nach (2.42) führen zu dem Zusammenhang

$$P = \tilde{E}a\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} [f_n(1) - f_n(x)] dx + 2\tilde{E}a \underbrace{\frac{\pi}{2}\chi(1)}_{=0}, \quad (2.47)$$

welcher aufgrund der verbleibenden simplen Integration über die gewichteten Summanden der Einhüllendenfunktion bereits an dieser Stelle eine wesentliche Schlußfolgerung zulässt:

Jedes reibungsfreie Normalkontaktproblem zwischen einem axialsymmetrischen Indenter und dem linear elastischen Halbraum läßt sich auf ein einfaches eindimensionales Modell abbilden, welches hinsichtlich der makroskopischen Größen Normalkraft und Eindrücktiefe die Ergebnisse des dreidimensionalen Kontaktes exakt wiedergibt!

Nach Wiedereinführung der dimensionsbehafteten Zylinderkoordinate r darf diese mittels Ausdehnung des Definitionsbereiches auf negative reelle Zahlen als eindimensionale kartesische Koordinate \tilde{x} gedeutet werden, wodurch aufgrund der Achsensymmetrie der Formfunktion die Erweiterung des Integrationsgebietes auf $-a \leq \tilde{x} \leq a$ zulässig ist. Es ergibt sich die folgende Darstellung der Bestimmungsgleichung für die Normalkraft

$$P = \tilde{E} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-a}^a \varkappa_n c_n (a^n - |\tilde{x}|^n) d\tilde{x} + 2\tilde{E}a \underbrace{\frac{\pi}{2}\chi(1)}_{=0} \quad \text{mit} \quad \varkappa_n \equiv \varkappa(n) := \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}. \quad (2.48)$$

Hierin kann den Parametern \varkappa_n physikalische Bedeutung zugeordnet werden. Die in Abbildung 2.1 gekennzeichnete Tiefe des Eindruckes im Kontaktbereich δ_c entspräche bei einer Potenzfunktion mit dem natürlichen Exponenten n als Einhüllende dem Wert $\delta_c \equiv \delta_{cn} = f_n(1)$. Aus der Gleichung (2.42) ist dann die direkte Proportionalität

$$\delta_n = \varkappa_n \delta_{cn} \quad (2.49)$$

zwischen Gesamteindrücktiefe δ_n und δ_{cn} ersichtlich. Nach Gleichung (2.48) berechnet sich die Kontaktkraft durch einfache Integration über modifizierte Formfunktionen, welche sich vom Original gerade um die besagten Faktoren \varkappa_n unterscheiden. Interpretieren wir jene als "neue Geometrie" des starren zweidimensionalen Indenters¹⁰ und führen den elastischen Parameter E_w^* ein, so entsteht offensichtlich ein für die Berechnung der makroskopischen Größen P und δ der dreidimensionalen axialsymmetrischen Problemstellung geeignetes eindimensionales Äquivalent. Während im realen räumlichen Fall die Verschiebung eines Punktes der Kontaktfläche von der Druckverteilung innerhalb des gesamten Berührungsgebietes abhängt, entfällt diese die Berechnung häufig erschwerende Eigenschaft gänzlich im reduzierten Ersatzmodell. Der geometriemodifizierte starre Stempel muß anstelle des elastischen Halbraumes lediglich in Kontakt mit einer uniaxialen elastischen Schicht¹¹ gebracht werden, deren Materialeigenschaft der eingeführte Stoffparameter E_w^* wiedergibt. Im Rahmen einer Diskretisierung und einfachen numerischen Umsetzung liegt es nahe, die Bettung der Dicke ℓ_o durch eine Vielzahl von Federn der ungespannten Länge ℓ_o zu charakterisieren, deren Längssteifigkeit k wie folgt mit dem Modul der einachsigen Kompression sowie dem realen effektiven Modul in Zusammenhang steht

¹⁰Eine HERTZsche Kugel mit dem Krümmungsradius R_{3D} würde demnach über einen Zylinder mit dem halben Krümmungsradius $R_{1D} := \frac{1}{2}R_{3D}$ abgebildet werden.

¹¹WINKLERSche Bettung

$$k = \Delta \tilde{x} \Delta y \frac{E_w^*}{\ell_o} = \tilde{E} \Delta \tilde{x}. \quad (2.50)$$

Die darin vorkommenden geometrischen Abmaße können der Abbildung 2.2 entnommen werden. Stellvertretend für eine Formfunktion beliebigen Profils sind am Beispiel des konischen Indenters $n = 1$ und parabolischen Indenters $n = 2$ die realen Problemstellungen und ihre durch "Dimensionsreduktion" geschaffenen Ersatzmodelle qualitativ aufgezeigt. An dieser Stelle möchte ich ergänzen, dass problemlos auch der *flache zylindrische Stempel* (Ordnung $n = 0$) abgebildet werden kann, wenn man einen von Null verschiedenen Translationsanteil ($\chi(1) \neq 0$) zulässt. Die dreidimensionale Indentergeometrie ist dabei "eins zu eins" in einen ebenen Stempel zu überführen (siehe Abschnitt 3.1.1).

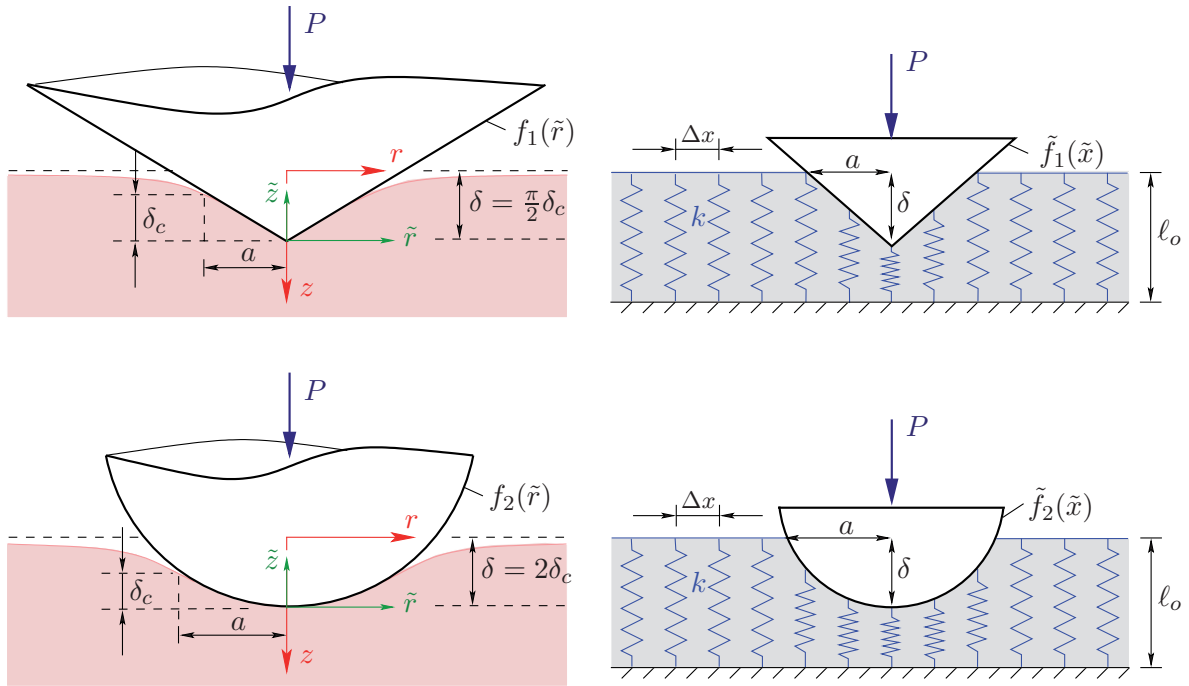


Abbildung 2.2: Qualitative Darstellung des Eindrucks eines konischen und parabolischen Indenters in den elastischen Halbraum mit zugehörigen Ersatzsystemen.

Die Korrelation der Größen P , δ und a im dreidimensionalen Kontakt wird demnach durch das Ersatzmodell korrekt wiedergegeben, wenn die Geometrieänderung der folgenden Transformation genügt:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &\longmapsto |\tilde{x}| \\ f_n(\tilde{r}) &:= c_n \tilde{r}^n \longmapsto \tilde{f}_n(\tilde{x}) := \tilde{c}_n |\tilde{x}|^n \quad \text{mit} \quad \tilde{c}_n := \varkappa_n c_n. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Der Formfaktor \varkappa_n , welcher in (2.48) definiert wurde, ist demnach der entscheidende Parameter und bestimmt die notwendige Formänderung des Indenters. Physikalisch kennzeichnet er das Verhältnis von Gesamteindringtiefe δ_n zu kontaktgebender Eindringtiefe δ_{cn} .

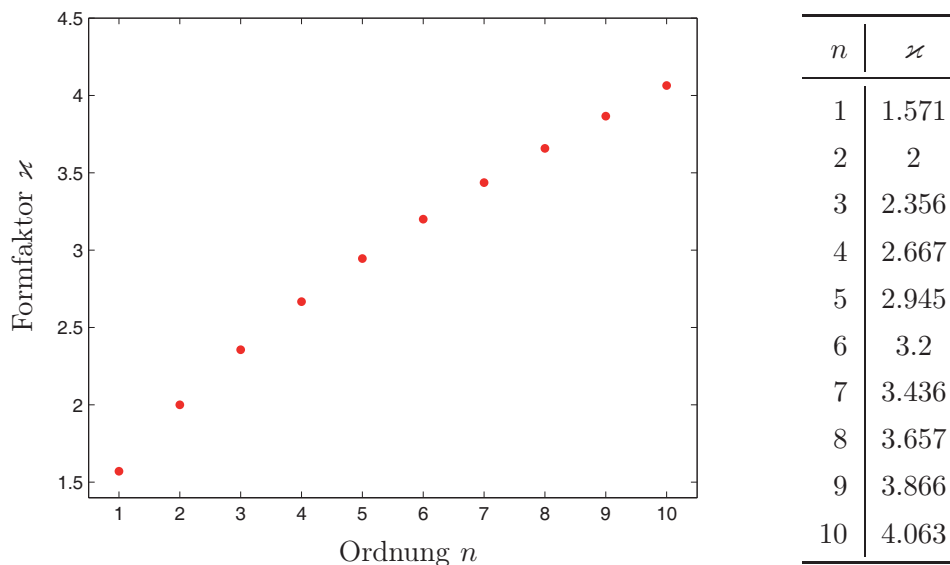


Abbildung 2.3: Formfaktor \varkappa in Abhängigkeit des Exponenten der Potenzfunktion graphisch und numerisch gerundete Werte tabellarisch aufgeführt.

2.3 Abbildung der Normalspannungsverteilung im Kontaktgebiet

Mit dem diskutierten eindimensionalen Ersatzmodell ist eine exakte Abbildung des dreidimensionalen Kontaktes möglich, solange nur makroskopische Größen von Interesse sind. Bei der zugrundegelegten uniaxialen linearen Schicht besteht an jedem Ort eine direkte Proportionalität zwischen Normalspannung und -verschiebung an der Oberfläche

$$p(\tilde{x}) = \frac{E_w^*}{\ell_o} u_z(\tilde{x}), \quad (2.52)$$

welche sich im Kontaktgebiet des dreidimensionalen Originals nicht ergibt. In dem durch Federn diskretisierten Modell treten anstelle von Spannungen zunächst nur Kräfte auf. Dies ermöglicht die Einführung einer fiktiven Spannungsdefinition, mit deren Hilfe dann die realen Kontaktspannungen verifiziert werden können. Für den parabolischen Asperiten, d.h. für den HERTZschen Kontakt, wurde diese Methodik erfolgreich angewandt [33], [32] und auf den Kontakt rauher Oberflächen ausgedehnt¹². Sie setzt allerdings die Kenntnis der Spannungsverteilung im Original voraus – für den HERTZschen Kontakt banal. Nun reagieren die Kontaktspannungen aber sehr empfindlich auf eine Änderung der Formfunktion des Indenters. Jede Geometrie erfordert eine neue “Spannungsdefinition” und diese wiederum die reale Druckverteilung, auf die für kompliziertere Indenterformen nicht so einfach geschlossen werden kann. Wie dennoch – basierend auf dieser Idee – die realen Kontaktspannungen aus den Federkräften des 1D-Modells elegant und exakt abgeleitet werden können, behandelt Unterpunkt 2.3.4. Es sei hier schon vorweggegriffen, dass jenes wichtige Kapitel die Zweckmäßigkeit des eindimensionalen Ersatzmodells zur Berechnung kontaktmechanischer Aufgaben unterstreicht und eine Weiterentwicklung der Methode verlangt.

Als rein akademisches Beispiel wird jedoch zunächst ein zweidimensionales Ersatzkontinuum vorgestellt, welches ebenfalls die realen Kontaktspannungen eines beliebig geformten axialsymmetrischen Indenters mit dem elastischen Halbraum *exakt* bereitstellt. Daher soll in Anlehnung an Abschnitt 2.1

¹²Auf diese wird zu einem späteren Zeitpunkt genauer eingegangen.

vorab eine Bestimmungsgleichung für die Spannungsverteilung im dreidimensionalen Kontakt in Abhängigkeit der Stempelgeometrie abgeleitet werden.

2.3.1 Kontaktspannungsverteilung in Abhängigkeit der 3D-Indentergeometrie

Mit (2.34) unter Berücksichtigung des Ansatzes (2.36) sind die Normalspannungen σ_{zz} an jeder Stelle im Halbraum ermittelbar, allerdings ist deren Bestimmung keineswegs trivial. Die Berechnung vereinfacht sich jedoch erheblich, wenn nur die Spannungen innerhalb des Kontaktgebietes – bei $z = 0$ – gesucht sind. So ergibt sich mit Hilfe von (A.11) und (A.13) als Funktion der normierten Länge x

$$\sigma_{zz}(x, 0) = \frac{G}{a(1-\nu)} \int_x^1 \frac{\dot{\chi}(t)}{\sqrt{t^2-x^2}} dt - \frac{G}{a(1-\nu)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\chi(1)}_{=0} \quad (2.53)$$

$$\text{mit } \chi(t) = \underbrace{\chi(1)}_{=0} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa(n) \delta_{cn} (1-t^n), \quad (2.54)$$

wobei letzteres für den allgemeinen Fall eines Polynom n -ten Grades als Formfunktion aus (2.38) entspringt. Einsetzen von (2.54) in (2.53) führt auf die entscheidende Formulierung der Kontaktspannungen, die als Grundlage einer späteren Anpassung der Geometrie des äquivalenten zweidimensionalen Ersatzmodells dienen wird:

$$\sigma_{zz}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zz}^{(n)}(x, 0) = -\frac{2G}{\pi a(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} n \varkappa(n) \delta_{cn} \int_x^1 \frac{t^{n-1}}{\sqrt{t^2-x^2}} dt. \quad (2.55)$$

Greifen wir nochmal auf den eingeführten Begriff der ‘reinen’ Indentergeometrie zurück, welche durch ein einziges n gekennzeichnet war, so gelten nach (2.55) für die entsprechenden Kontaktspannungen die nachstehenden Beziehungen

$$\sigma_{zz}^{(n)}(x, 0) = -\frac{2G}{\pi a(1-\nu)} n \varkappa(n) \delta_{cn} I_n(x) \quad (2.56)$$

$$\text{mit } I_n(x) := \int_x^1 \frac{t^{n-1}}{\sqrt{t^2-x^2}} dt. \quad (2.57)$$

Den eigentlichen Unterschied macht demnach das Integral I_n aus. Für jenes existiert eine Rekursionsformel, welche für ungerade Potenzen n von den Spannungen unterhalb eines konischen und für gerade Potenzen eines parabolischen Indenters ausgeht

$$I_n(x) = \frac{1}{n-1} \left[\sqrt{1-x^2} + (n-2)x^2 I_{n-2}(x) \right] \quad \text{für } n \geq 3$$

$$\text{mit } I_1(x) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad I_2(x) = \sqrt{1-x^2}. \quad (2.58)$$

In der Abbildung 2.4 sind die Oberflächenspannungen innerhalb des Kontaktgebietes $\sigma_{zz}^{(n)}(x, 0)$ in einer reduzierten Form bis zur Ordnung $n = 10$ über den normierten Kontaktradius graphisch veranschaulicht, wobei farblich zwischen geraden und ungeraden Potenzen unterschieden wird.

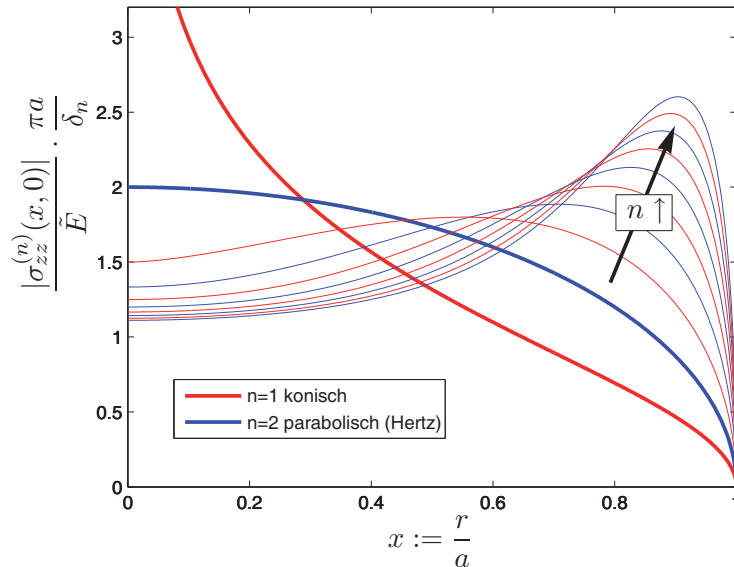


Abbildung 2.4: Normierte Normalkontaktspannungen aufgetragen über den normierten Kontaktradius parametrisiert durch die Ordnungszahl n

Während beim konischen Indenter ($n = 1$) der Druck in der Mitte aufgrund der Unstetigkeit in den Verzerrungen einem theoretisch unendlich großen Wert entgegenstrebt, bleibt das Spannungsmaximum im Falle des HERTZschen Kugelkontaktes ($n = 2$) dort endlich. Bekanntermaßen dient dieser als Grundlage des *kontraformen Kontaktes*, bei welchem sich die Kontaktpartner zunächst nur in einem Punkt¹³ berühren und sich unter Last eine endliche Kontaktfläche ausbildet, deren charakteristische Länge sehr viel kleiner als die Krümmungsradien der Oberflächen ausfällt. Solche Oberflächen können demnach durch Funktionen 2.Grades angenähert und damit vollständig über ihren Krümmungsradius ausgedrückt werden¹⁴. Der *konforme Kontakt* hingegen verlangt eine genauere Abbildung der Oberflächen, da die Berührung der kontaktierenden Körper bereits über ein flächenhaftes Gebiet erfolgt, bevor überhaupt eine Deformation stattgefunden hat. Mittels der abgeleiteten Beziehungen (2.56) stellt auch jener Kontakt kein Problem dar. Abbildung 2.4 zeigt deutlich, wie empfindlich die Spannungsverteilung auf eine Geometrieänderung reagiert. Für Potenzen $n > 2$ wandert das Druckmaximum mit steigender Ordnungszahl in Richtung des Kontakttrandes. Bereits STEUERMANN [113]¹⁵ konnte diese Erscheinung auf Grundlage der Fundamentallösungen mathematisch festhalten.

Eine Annäherung des oben erklärten Zieles, auch die Spannungsverteilungen in der Kontaktfläche durch ein reduziertes 2D-Modell *exakt* abzubilden, verlangt zunächst die Aufbereitung des zweidimensionalen Kontaktes.

¹³im Falle des ebenen Verzerrungszustandes entlang einer Linie

¹⁴Diese Näherung wird häufig auch bei der Berechnung des Kontaktes rauer Oberflächen genutzt, z.B. in [40].

¹⁵Das Originalpaper enthält leider einen Fehler, welcher selbst in der einschlägigen Literatur von JOHNSON [53] ca. 50 Jahre später noch vorhanden ist.

2.3.2 Kontaktspannungsverteilung im analogen zweidimensionalen Fall

Auch in diesem Abschnitt sollen Kontaktprobleme mit Hilfe der Halbraumtheorie untersucht werden, allerdings mit dem Unterschied, dass jener nun nicht mehr axialsymmetrisch, sondern über einen (unendlich) langen Streifen konstanter Breite beansprucht wird. Dabei stellt sich im Inneren ein *ebener Verzerrungszustand* (EVZ) ein, d.h. eine Verschiebungskomponente wird verschwinden, während die verbleibenden nur noch von zwei Koordinaten abhängen. Ein solches zweidimensionales Kontaktproblem zeigt Abbildung 2.5, wobei die Belastung weiterhin symmetrisch erfolgt, wie sie aus dem Kontakt mit einem (unendlich) langen zylindrischen, achsensymmetrischen Indenter resultieren würde.

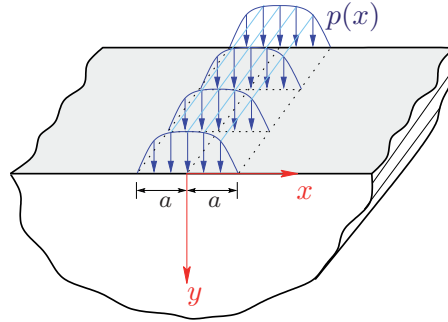


Abbildung 2.5: Streifenförmige Last auf einem elastischen Halbraum – EVZ.

Die Lösung der Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie (siehe Abschnitt 2.1.1) kann durch die Annahme eines EVZ

$$u_x = f_1(x, y) \quad u_y = f_2(x, y) \quad u_z = 0 \quad (2.59)$$

auf die Integration von drei Differentialgleichungen zurückgeführt werden¹⁶

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.60)$$

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (2.61)$$

Neben den Gleichgewichtsbedingungen (2.60) ist noch die sogenannte M. LEVYSche Bedingung (2.61) zu erfüllen¹⁷. Mittels Einführung einer geeigneten Spannungsfunktion Φ reduzierte AIRY [1] das Problem sogar noch auf eine einzige Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\Delta\Delta\Phi = 0 \quad (2.62)$$

$$\text{mit} \quad \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.63)$$

Wie im vorab behandelten axialsymmetrischen Fall – Gleichung (2.13) – ist demnach eine Bipo-tenzialgleichung zu lösen. Dies geschieht in völlig analoger Weise nur das aufgrund der geringeren Dimension anstelle der HANKEL-Transformation die einfache FOURIER-Transformation tritt. Auf die Herleitung soll an dieser Stelle verzichtet und auf den Anhang B verwiesen werden. Unbedingt nochmal hervorzuheben ist allerdings die Tatsache, dass die Bestimmungsgleichungen für die Feldgrößen dank der Lösungsmethodik auf Basis der Integraltransformationen eine gewisse Forminvarianz aufzeigen¹⁸.

¹⁶Selbstverständlich dürfen die Randbedingungen nicht außer Acht gelassen werden.

¹⁷Näheres zu deren Herleitung in [27] bzw. [38]

¹⁸Diese Forminvarianz verspricht weitere Abbildungsmöglichkeiten und ist Gegenstand von Kapitel 2.4.

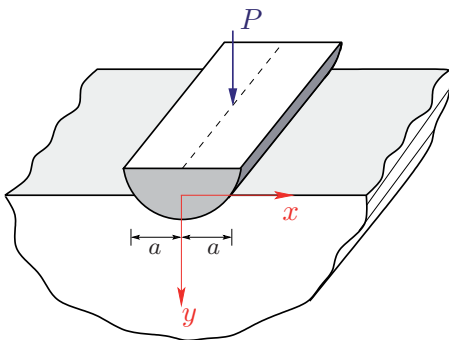
Die Achsensymmetrie des langen zylindrischen Indenters vereinfacht die Formulierung der Feldgrößen (2.64), denn die FOURIER-Transformierte der Normalspannungsverteilung an der Oberfläche ist eine gerade Funktion, so dass an ihrer Stelle auch die FOURIER-Cosinus-Transformierte nach (A.4) herangezogen werden kann:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (1 - \lambda y) p_c(\lambda) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \\
 \sigma_{yy} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (1 + \lambda y) p_c(\lambda) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \\
 \tau_{xy} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda y p_c(\lambda) e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda \\
 u_x &= -\frac{1 + \nu}{E} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{p_c(\lambda)}{\lambda} (1 - 2\nu - \lambda y) e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda \\
 u_y &= \frac{1 + \nu}{E} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{p_c(\lambda)}{\lambda} [2(1 - \nu) + \lambda y] e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Die wesentlichen Schritte des weiteren Lösungsweges folgen der Arbeit von SNEDDON [105], welcher vorab dimensionslose Größen¹⁹ einführt

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &:= \frac{x}{a}, & \tilde{y} &:= \frac{y}{a}, \\
 \eta &:= \lambda a, & \tilde{u}(\tilde{x}) &:= \frac{u_{yo}(x)}{a};
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

die Funktion $u_{yo}(x)$ setzt sich dabei aus einem konstanten sowie einem von der Formfunktion des achsensymmetrischen Indenters geprägten Anteil zusammen und schlägt sich in den Randbedingungen nach Abbildung 2.6²⁰ nieder.



Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 u_y(x, y = 0) &= u_{yo}(x) & \text{für } |x| < a \\
 \sigma_{yy}(x, y = 0) &= 0 & \text{für } |x| > a \\
 \tau_{yx}(x, y = 0) &= 0 & \text{für } -\infty < x < \infty
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.6: Prinzipskizze für den Kontakt eines langen zylindrischen Indenters und dem elastischen Halbraum (EVZ) mit zugehörigen Randbedingungen.

Die Auswertung der Randbedingungen führt nach einigen Umformungen auf die Suche der frequenzabhängigen Funktion $\alpha(\eta)$, welche mit der Transformierten der Normaldruckverteilung im Kontaktgebiet gemäß

¹⁹Jene werden zwar ebenfalls mit dem Symbol $\tilde{}$ gekennzeichnet, sind allerdings aufgrund der Angabe des jeweiligen Argumentes leicht von den nach FOURIER transformierten Größen unterscheidbar.

²⁰Diese Grafik soll nur als Prinzipskizze dienen; die Oberflächenverschiebung ist darin nicht korrekt dargestellt.

$$\alpha(\eta) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_c(\eta)}{E\eta^2 a} \quad (2.66)$$

zusammenhängt und die *Dualintegralgleichungen*

$$\int_0^\infty \eta \alpha(\eta) \cos(\eta \tilde{x}) d\eta = \frac{\tilde{u}(\tilde{x})}{2(1-\nu^2)} \quad \text{für} \quad 0 \leq \tilde{x} \leq 1 \quad (2.67)$$

$$\int_0^\infty \eta^2 \alpha(\eta) \cos(\eta \tilde{x}) d\eta = 0 \quad \text{für} \quad \tilde{x} > 1 \quad (2.68)$$

erfüllt. Mit Hilfe der im Anhang A.2 aufgeführten Gleichung (A.14) lassen sich die Integranden derart modifizieren, dass die Dualintegralgleichungen als Spezialfall aus einer allgemeinen Formulierung hervorgehen, deren Lösung bekannt ist

$$\int_0^\infty \eta^{\frac{3}{2}} \alpha(\eta) J_{-\frac{1}{2}}(\eta \tilde{x}) d\eta = \frac{\tilde{u}(\tilde{x})}{(1-\nu^2)} (2\pi \tilde{x})^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad 0 \leq \tilde{x} \leq 1 \quad (2.69)$$

$$\int_0^\infty \eta^{\frac{5}{2}} \alpha(\eta) J_{-\frac{1}{2}}(\eta \tilde{x}) d\eta = 0 \quad \text{für} \quad \tilde{x} > 1. \quad (2.70)$$

Die Auswertung des Lösungsintegrals nach BUSBRIDGE (B.9) führt auf

$$\alpha(\eta) = \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left[-\frac{1}{\eta} J_1(\eta) \int_0^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}(y) dy + \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \tilde{u}(yt) y J_0(\eta y) dy dt \right]. \quad (2.71)$$

In Analogie zum axialsymmetrischen Fall wird die Oberfläche im Kontakt und damit die Formfunktion des Indenters durch ein Polynom n -ten Grades (mit $n \rightarrow \infty$) approximiert, wobei diesmal auch ein konstanter Anteil zum Tragen kommt

$$u_{yo}(\tilde{x}) := -\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n(\tilde{x}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n a^n \tilde{x}^n. \quad (2.72)$$

Einsetzen von (2.72) in (2.71) ergibt unter Beachtung der integralen Beziehung (A.17)

$$\alpha(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n a^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\eta} \int_0^1 y^n J_1(\eta y) dy, \quad (2.73)$$

womit die Normalspannungen innerhalb des Kontaktgebietes mit der Identität (2.66) und der zugehörigen Beziehung aus Gleichung (2.64) bestimmbar sind²¹. Die nachfolgende Formulierung der Kontaktspannungen genügt dabei der Anforderung, dass jene am Rande des Kontaktgebietes verschwinden

$$\sigma_{yy}(\tilde{x}, y=0) = -\frac{E}{\sqrt{\pi}(1-\nu^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} n \hat{c}_n a^{n-1} \tilde{x}^{n-1} \int_1^{1/\tilde{x}} \frac{\tilde{t}^{n-1}}{\sqrt{\tilde{t}^2-1}} d\tilde{t}. \quad (2.74)$$

²¹Geeignete Stütze der Berechnung beinhaltet das Werk von WATSON [118].

Mit Gleichung (2.74) ist die Druckverteilung zwischen einem (langen) zylindrischen Indenter und dem elastischen Halbraum – also die Lösung des 2D-Falls (EVZ) – gefunden. Am Anfang des Kapitels wurde aber als übergeordnetes Ziel ausgesprochen, die Kontaktspannungen bei Indentierung des elastischen Halbraumes durch einen beliebig geformten, axialsymmetrischen Stempel exakt über ein Ersatzmodell wiederzugeben. Inwieweit das 2D-Problem uns diesem Ziel näherbringt, wird nach einer geeigneten Substitution des Integrals in (2.74) augenscheinlich klar

$$\sigma_{yy}(\tilde{x}, y=0) = -\frac{E}{\sqrt{\pi}(1-\nu^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} n \hat{c}_n a^{n-1} \int_{\tilde{x}}^1 \frac{t^{n-1}}{\sqrt{t^2 - \tilde{x}^2}} dt \quad (2.75)$$

und im folgenden Abschnitt im Detail erläutert.

2.3.3 Zweidimensionales Ersatzmodell – Abbildung von Kontaktspannungen

Durch die vorausgegangene Untersuchung des realen zweidimensionalen Kontaktproblems (EVZ) sind alle vorbereitenden Schritte vollzogen, welche die Entwicklung eines Ersatzmodells ermöglicht, das nun auch die Druckverteilung im Kontaktgebiet eines starren axialsymmetrischen Indenters mit dem elastischen Halbraum reproduziert. Ein einfacher Vergleich der Ergebnisse nach (2.55) und (2.75) zeigt auf, dass zwischen den Spannungen und der jeweiligen Ortskoordinate – repräsentiert durch das enthaltene Integral – derselbe funktionale Zusammenhang besteht. In der Konsequenz darf nachstehende Aussage getroffen werden:

Die Normalspannungen im reibungsfreien Kontakt zwischen einem axialsymmetrischen Indenter und dem linear elastischen Halbraum lassen sich exakt auch mittels Indentierung des Halbraums durch einen langen zylindrischen Indenter erzeugen (EVZ). Die Formfunktion des Eindringkörpers ist dabei lediglich durch konstante Koeffizienten zu modifizieren!

Nach den Transformationen $y \rightarrow z$ und $\tilde{x} \rightarrow r/a$ muss die Ersatzgeometrie aus (2.72) folgendem Bildungsgesetz genügen, um ein genaues Abbild der Normaldruckverteilung im realen System zu schaffen

$$f_n(r) := c_n r^n \quad \rightarrow \quad \hat{f}_n(x) := \hat{c}_n |x|^n \quad \text{mit} \quad \hat{c}_n := \beta_n c_n. \quad (2.76)$$

Der darin vorkommende Transformationskoeffizient β_n hängt wiederum von der Ordnung n ab und gehorcht der Vorschrift

$$\beta_n \equiv \beta(n) := \frac{n}{2} \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2})}{\Gamma^2(\frac{n+1}{2})}. \quad (2.77)$$

Während der Formfaktor \varkappa_n im eindimensionalen Ersatzmodell zum Erhalt der globalen Größen P und δ noch physikalisch gedeutet werden konnte²², beschreibt β_n die notwendige Formänderung, damit die lokalen Spannungen im Kontaktgebiet exakt abgreifbar sind.

²²Zur Erinnerung: \varkappa_n stellte gerade das Verhältnis von Gesamt- zu kontaktgebender Eindringtiefe dar!

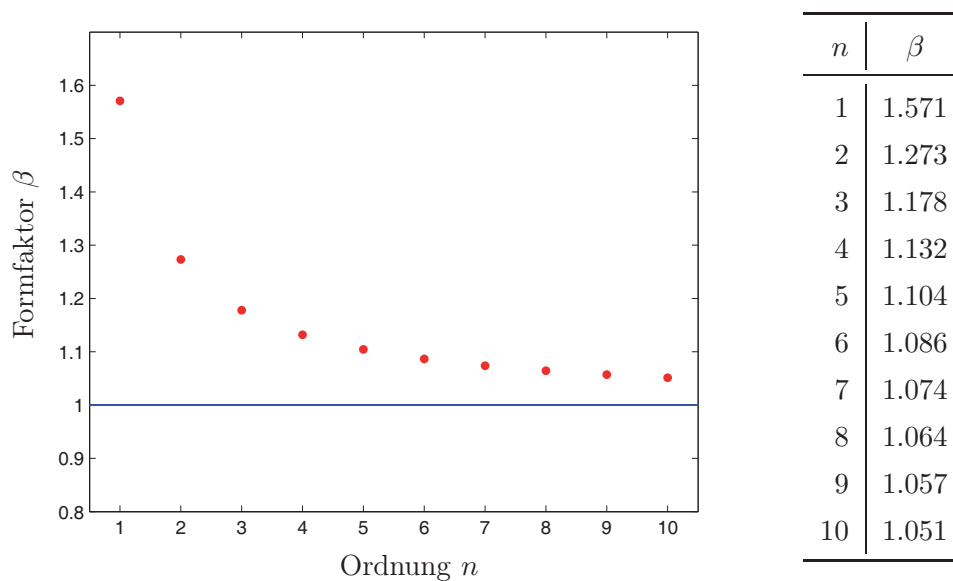


Abbildung 2.7: Formfaktor β in Abhängigkeit des Exponenten n der Potenzfunktion graphisch und numerisch gerundete Werte tabellarisch aufgeführt.

Mit steigender Konformität wird der Unterschied in den Geometriefunktionen des realen und fiktiven Indenters verschwindend gering, denn mit zunehmender Ordnungszahl n geht der Formfaktor β asymptotisch gegen Eins (Siehe Abbildung 2.7.). Diese Erscheinung zeigte sich nicht im Rahmen des eindimensionalen Ersatzmodells. Hier mußte für die Abbildung der globalen Größen die Transformation ausgedrückt über \varkappa unbedingt berücksichtigt werden.

Die Frage nach dem Sinn, eine axialsymmetrische Aufgabenstellung über einen Ebenen Verzerrungszustand auszudrücken, ist schnell beantwortet. Wir müssen uns lediglich daran erinnern, dass das EVZ-Problem aus mathematischer Sicht einem ESZ-Problem gleicht. Die Unterschiede in den HOOKEschen Gesetzen verlangen nur eine Substitution der elastischen Parameter:

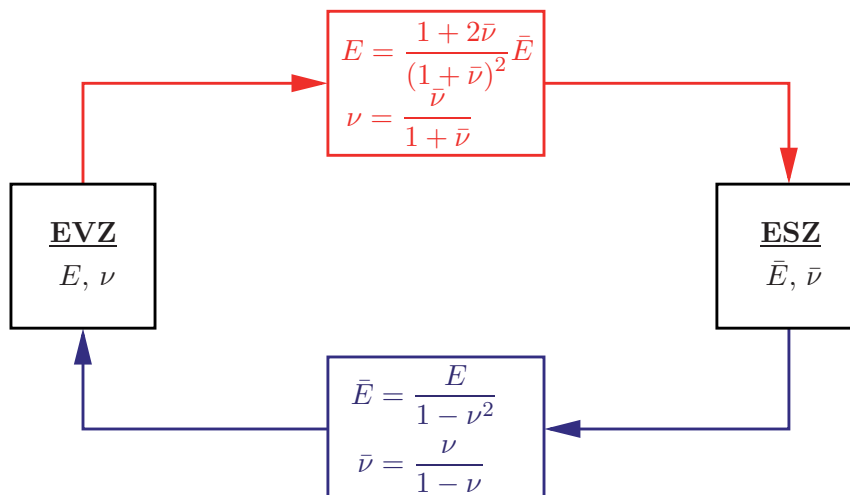


Abbildung 2.8: Umrechnung der elastischen Parameter bei Wechsel zwischen ebenem Verzerrungs- und Spannungszustand.

Anstelle des Halbraums tritt demnach die Halbscheibe, d.h. die im Vorfeld einer numerischen Umsetzung mittels z.B. FEM oder MPS erforderliche Diskretisierung ist auf zwei Dimensionen beschränkt.

Die Rechenzeit wird hierdurch erheblich gesenkt, ohne an Genauigkeit einzubüßen – der analytische Nachweis wurde in dieser Arbeit erbracht!

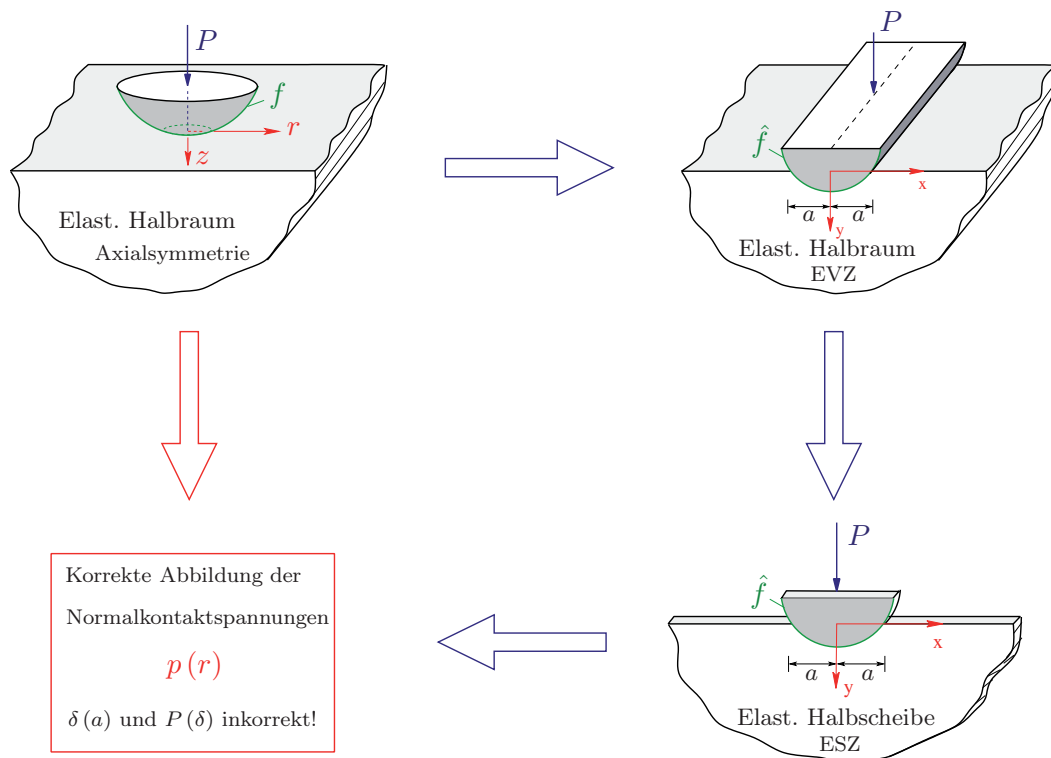


Abbildung 2.9: Reduktionsschema für die Darstellung von Normalkontaktspannungen für beliebig geformte Indenter

In Abbildung 2.9 ist der Reduktionsvorgang schematisch dargestellt. Die Spannungsverteilungen im Kontaktgebiet stimmen in allen drei Zuständen überein. Das gilt aber weder für die Verschiebungen an der Oberfläche noch für die Feldgrößen im Inneren, nicht einmal für die Relationen zwischen den makroskopischen Größen des Originals (P - δ - a). Daher soll der Reduktionsvorschlag nicht weiter betrachtet, sondern ein effizienteres Werkzeug ausgehend vom 1D-Modell entwickelt werden.

2.3.4 Eindimensionales Ersatzmodell – Abbildung von Kontaktspannungen

Der starke Reduktionsschritt von 3D auf 1D im Abschnitt 2.2 lieferte eine genaue Abbildung der globalen Größen: Eindringtiefe und Normalkraft. Die Spannungen in der uniaxialen Schicht sind proportional den Normalverschiebungen und spiegeln in dieser Eigenschaft nicht die wahren Verhältnisse des dreidimensionalen Kontaktes wieder. Die nachfolgende Abhandlung beschäftigt sich daher mit der Fragestellung, wie man trotz der Begrenztheit des Federmodells aus diesem die Oberflächenspannungen filtern kann. Eine einfache Perspektive für den HERTZschen Kontakt wurde in [32, 33] aufgezeigt und läßt auf eine mögliche Erweiterung für beliebige axialsymmetrische Formfunktionen hoffen. Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen sollen die Gleichungen (2.53) und (2.54) bilden, aus welchen für die Formparabeln n -ter Ordnung bereits Rekursionsformeln für die Kontakt drücke abgeleitet wurden – ihr Informationsgehalt ist damit aber längst nicht ausgeschöpft. Mit der Gültigkeit des Superpositionsprinzips ist die künftige Betrachtung nur einer Parabel n -ten Grades naheliegend. Die angesprochenen Gleichungen nehmen dann folgende Gestalt an

$$\sigma_{zz}^{(n)}(\tilde{x}, 0) = \frac{G}{a(1-\nu)} \int_{\tilde{x}}^1 \frac{\dot{\chi}_n(t)}{\sqrt{t^2 - \tilde{x}^2}} dt - \frac{G}{a(1-\nu)} \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{x}^2}} \chi(1) \quad (2.78)$$

$$\text{mit} \quad \chi_n(t) - \chi(1) = \frac{2}{\pi} \varkappa(n) \delta_{cn} (1 - t^n), \quad (2.79)$$

wobei letztere abgesehen von einem Faktor und der Interpretation der Variable t als auf den Kontaktradius a normierte Weggröße nichts anderes als die Verschiebung der Oberfläche im Ersatzmodell bedeutet, d.h.

$$\chi_n(t) - \chi(1) = \frac{2}{\pi} (\delta_n - \tilde{f}_n(t)). \quad (2.80)$$

Dann lassen sich die Spannungen mit Hilfe von (A.6) und (A.8) über die ABEL-Rücktransformation 2.Art der Federkräfte/-spannungen²³ gemäß

$$p_n(\tilde{x}) \equiv -\sigma_{zz}^{(n)}(\tilde{x}, 0) = \frac{\tilde{E}}{a\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tilde{x}} \mathcal{A}_2^{-1} \left[\frac{\pi}{2} \chi(1) + \delta_n - \tilde{f}_n(t); \tilde{x} \right] \quad (2.81)$$

formulieren. Zwar ist die rechte Seite nur schwer physikalisch zu deuten, birgt aber etwas ganz Entscheidendes, wenn man sich an die Berechnung von Normalkraft und Eindringtiefe erinnert. Hierzu mußte eine modifizierte Stempelgeometrie mit der uniaxialen elastischen Schicht in Kontakt gebracht werden. Genau diese Verschiebungsvorgabe findet sich in (2.81) wieder, womit – ungeachtet der Schwierigkeit der mathematischen Umsetzung dieser Integralgleichung – gesagt werden darf:

Mit Gleichung (2.81) ist eine Toolerweiterung geschaffen, durch die neben der Normalkraft P und Eindringtiefe δ nun auch die Spannungen im Kontaktgebiet $p(r)$ allein aus dem Federmodell berechenbar sind. Die genannten Größen stimmen dabei exakt mit denen des zu beschreibenden dreidimensionalen Kontaktes überein.

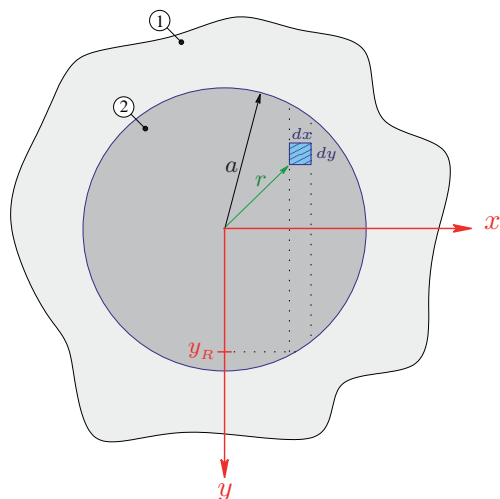
Die getroffene Aussage ist für jede beliebige axialsymmetrische Form des Originalindenter gültig! Die Invertierung von (2.81) kann sogar anschaulich physikalisch interpretiert werden; eine geeignete Umformung unter Einbeziehung der die WINKLERSche Bettung bezeichnenden Parameter nach (2.50) lautet

$$\frac{\Delta y}{\ell_o} E_w^* (\delta_n - \tilde{f}_n(x)) \equiv \frac{k}{\Delta x} (\delta_n - \tilde{f}_n(x)) = \sqrt{2\pi} \mathcal{A}_2[rp_n(r); x] \equiv \mathcal{W}[p_n(r); x]. \quad (2.82)$$

In Würdigung der Arbeiten von WEBER [119, 120] wurde darin eine gleichnamige Transformation eingeführt – abgekürzt durch das Symbol \mathcal{W} . Diese beschreibt die Umrechnung einer rotationsymmetrischen Belastung auf eine zweidimensionale mittels eines Translationsprozesses, der kurz erläutert wird. Ausgehen wollen wir dabei von einer drehsymmetrischen Spannungsverteilung auf einem elastischen Halbraum, wie sie beispielsweise durch den Kontakt mit einem axialsymmetrischen Indenter entstehen würde. Die Spannungen, welche innerhalb eines zur y -Achse parallel verlaufenden Streifens infinitesimaler Breite dx wirken, werden aufsummiert/integriert. Vereinfacht kann man von einer Projektion der Spannungen auf die x -Achse sprechen, wie sie u.a. als Teilintegral zur Berechnung der Normalkraft auftritt, wenn man die kartesischen Koordinaten x und y beibehält.²⁴

²³Nochmals sei vermerkt, dass diese proportional der transformierten Verschiebung im 1D-Modell sind.

²⁴Genaugenommen verteilt WEBER die so gewonnene Streckenlast noch auf die Länge “2”.



- ① Oberfläche des elastischen Halbraums
 ② Druckbeaufschlagte Kreisfläche

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}[p(r); x] &:= \int_{-y_R}^{y_R} p(r) dy \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} p(r) dy \\
 &= 2 \int_x^a \frac{rp(r)}{\sqrt{r^2-x^2}} dr \\
 &\equiv \underline{\underline{\sqrt{2\pi} \mathcal{A}_2[rp(r); x]}}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.10: Durch eine rotationssymmetrische Last $p(r)$ beanspruchter Halbraum – Draufsicht (links); Überführung der WEBER-Transformation auf ein ABEL-Integral 2.Art (rechts).

Abbildung 2.10 dient dem besseren Verständnis des Projektionsprozesses, dessen mathematische Definition sowie Übergang zu einem ABEL-Integral ebenfalls aufgeführt sind. Anhand von Gleichung (2.82) ist leicht einzusehen, dass die soeben definierte Projektion der axialsymmetrischen Last genau die mit der Tiefe Δy multiplizierten Federspannungen widerspiegelt.

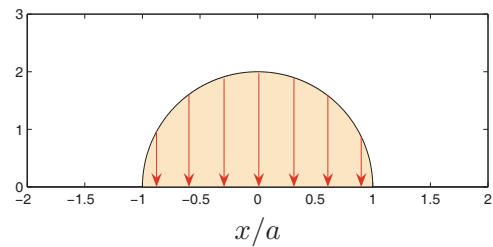
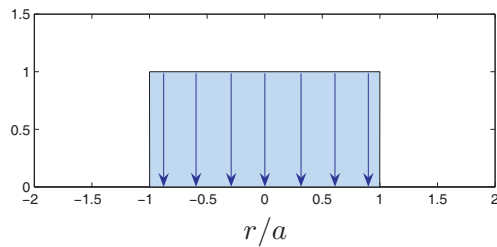
Für drei in der Kontaktmechanik grundlegende Beispiele axialsymmetrischer Druckverteilungen sind nachfolgend die Webertransformationen aufgeführt und damit quasi die Linienlasten (bzw. Verschiebungen) im 1D-Modell berechnet worden:

Axialsymmetrische Druckverteilung

WEBER-Transformierte (Linienlast)

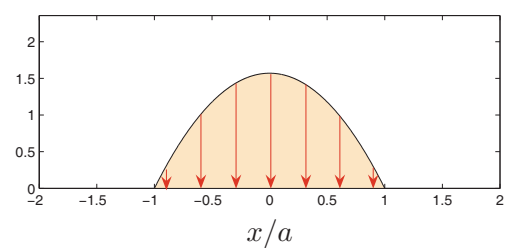
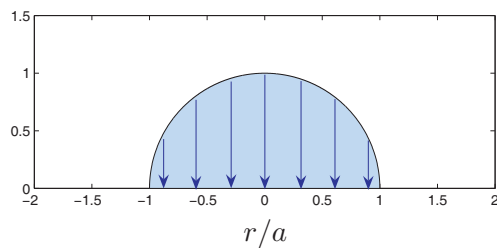
Konstant: $\frac{p_{3D}(r)}{p_o} = 1$

$$\frac{\mathcal{W}[p_{3D}(r); x]}{p_o a} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$



HERTZ (Kugel): $\frac{p_{3D}(r)}{p_o} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$

$$\frac{\mathcal{W}[p_{3D}(r); x]}{p_o a} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$



Flacher Stempel: $\frac{p_{3D}(r)}{p_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}$

$$\frac{\mathcal{W}[p_{3D}(r); x]}{p_o a} = \pi$$

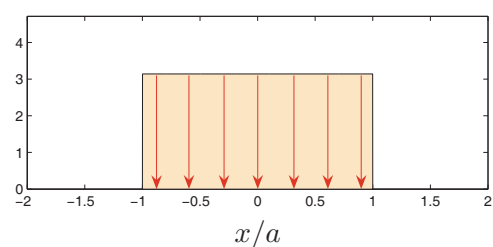
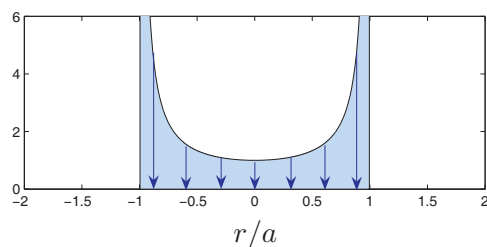


Abbildung 2.11: Beispielhafte Verteilungen von Kontaktspannungen im Original und deren WEBER-Transformierte – Bezogene Spannungen im Ersatzmodell!

Man beachte, dass zwar in allen Teilabbildungen das gleiche (normierte) Wegintervall dargestellt ist, wohl aber die Skalierungen der Hochachse Unterschiede aufweisen! Jene kennzeichnet die Druckver-

teilung bezogen auf p_0 , ihrem Wert im Zentrum. Während in den ersten beiden Fällen (konstant, HERTZ) die Spannungen im gesamten Kontaktgebiet finit bleiben, streben jene am Kontaktrand unterhalb eines flachen zylindrischen Stempels bekanntlich gegen unendlich. Die Grafiken rechterhand zeigen je die WEBER-Transformierte der realen Belastung, welche genau der korrespondierenden Lastgröße im eindimensionalen Modell entspricht – *der auf die Diskretisierungsbreite Δx bezogenen Federkraft*. Bei genauer Betrachtung der angesprochenen Standardlastfälle haben diese gemein, dass die axialsymmetrischen Druckbeanspruchungen einfach aus ihrem Projektionsabbild gemäß

$$p_{3D}^{(i)}(r) = \gamma_i \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mathcal{W} \left[p_{3D}^{(i)}(r); x \right]_{x=r} \quad (2.83)$$

gewonnen werden können. Abgesehen von einem geometrieabhängigen (dimensionslosen) Vorfaktor γ_i sind die Federkräfte demnach lediglich durch einen *speziellen Wurzelausdruck* zu dividieren. Auf genau diesen Umstand haben GEIKE und V.L. POPOV in [33] aufmerksam gemacht, indem sie für den HERTZschen Kontakt die zugehörige Druckverteilung nach einem fiktiven Gesetz aus den lokalen Größen des eindimensionalen diskreten Systems errechneten:

$$p(r_j) \sim F_F(r_j) \frac{1}{\sqrt{\left(\delta - \frac{1}{2R_1} r_j^2\right) R_1}}. \quad (2.84)$$

Der Krümmungsradius der Kugel im Ersatzmodell R_1 wurde halb so groß wie der des Originals gewählt, um im Vorfeld die richtigen makroskopischen Zusammenhänge $P(\delta)$ und $\delta(a)$ sicherzustellen (siehe Abschnitt 2.1.4); r_j stammt dabei aus der Diskretisierung der Radialkoordinate – eine Eigenschaft des reduzierten (numerischen) Modells. Für die diskutierten Standardfälle beinhaltet Gleichung (2.83) (bzw. (2.84)) eine äußerst elegante Methode zur Berechnung der Kontaktspannungen, deren Einfachheit kaum zu unterbieten ist. So hängt der Druck in einem definierten radialen Abstand r_j eindeutig auch nur von der analogen Position x_j im reduzierten Konstrukt ab. Leider besitzt dieses *vermeintliche Bildungsgesetz* aber *keine Allgemeingültigkeit*, was bereits anhand der Lösung für den Kontakt zwischen einem konischen Eindringkörper und dem Halbraum zum Ausdruck kommt. Aufgrund der entsprechenden Rekursionsformel nach (2.58) kann diese Aussage sofort auf alle Indenterformfunktionen mit ungeradem Exponenten ausgedehnt werden. Bei genauer Sicht bringen auch gerade Potenzen keine Abhilfe, obwohl deren Lösungen rekursiv aus dem HERTZschen Kontakt hervorgehen.

In Verbindung mit der obigen Diskussion möchte ich noch zwei interessante Ergänzungen etwas näher erläutern. So entwickelte G.Ia. POPOV in [89] die Spannungsverteilung für den reibungsfreien axialsymmetrischen Kontakt in eine Reihe besonderer LEGENDRE Polynome $L_{2n}(\sqrt{1 - \bar{r}^2})$ und erhielt eine Lösung für die Normalverschiebung innerhalb des Kontaktgebietes in geschlossener Form:

$$\begin{aligned} p\left(\bar{r} := \frac{r}{a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{r}^2}} \sum_{n=0}^N k_{2n} L_{2n}\left(\sqrt{1 - \bar{r}^2}\right) \\ \implies u_z(\bar{r}, z=0) &= \frac{\pi a (1 - \nu)}{2G} \sum_{n=0}^N k_{2n} [L_{2n}(0)]^2 L_{2n}\left(\sqrt{1 - \bar{r}^2}\right). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Offensichtlich gilt für jedes korrespondierende Gliedpaar der Reihen bis auf die uns bekannte Wurzel $\sqrt{1 - \bar{r}^2}$ eine direkte Proportionalität. Im Umkehrschluß erhält man für eine spezifische Indenterform selbstverständlich auch die zugehörige Druckverteilung im Kontaktgebiet; die Schwierigkeit besteht allein darin, die Faktoren k_{2n} durch einen Koeffizientenvergleich mit der Verschiebungsvorgabe zu bestimmen. Die Definition der modifizierten LEGENDRE Polynome sowie die Anwendung

von Gleichung (2.85) auf ein konkretes Beispiel sind im Anhang C.1 zu finden. Es ist anzumerken, dass hierbei die realen lokalen Kontaktgrößen entwickelt werden.

Ein ganz anderer Ansatz hingegen bedeutet die Darstellung der Verschiebung unseres eindimensionalen Modells als Summe von Wurzelgliedern, dessen mathematischer Apparat ebenfalls inklusive eines Beispiels in Anhang C.2 aufgeführt ist. Vorweg möchte ich den Leser mit Nachdruck für diese Passage begeistern, denn das Verfahren ist mindestens genauso elegant, wie einst der Lösungsansatz über LEGENDRE Polynome und es stellt in Bezug auf die eindimensionale Federkette eine Perspektive zur einfachen Bestimmung der Spannungsverteilung dar!

An dieser Stelle sei wiederholt betont, dass neben den makroskopischen Beziehungen $P(\delta)$ und $\delta(a)$ für den elastischen axialsymmetrischen Kontakt nun auch die Spannungsverteilung an der Oberfläche $p(r)$ aus einem reduzierten Ersatzsystem hervorgehen. Für letztere wird die WEBER- bzw. ABEL-Integralgleichung nach (2.82) benötigt, welche eine entscheidende Rolle im nächsten Abschnitt einnimmt, wenn es darum geht, auch die Spannungen innerhalb des Halbraumes durch einen Reduktionsprozeß abzubilden.

2.4 Abbildung der Feldgrößen im Inneren des Halbraums

Im Hinblick auf makroskopische Größen und Spannungszustände innerhalb der Berührungsfläche zweier kontaktierender Körper gibt das eindimensionale Modell exakt die Ergebnisse wieder, welche sich im dreidimensionalen Kontaktvorgang einstellen. Dieses bedeutet eine erhebliche Einsparung an Rechenzeit, bei dessen numerischen Umsetzung. Nun gehen aber zahlreiche Mechanismen in der Tribologie auf die Werkstoffbeanspruchung im Inneren der Bauteile zurück, welche mit Hilfe von Festigkeitshypothesen zu beurteilen ist. Das Spannungsfeld der HERTZschen Pressung bei einem (geschmierten) Roll- bzw. Walzvorgang kann beispielsweise zur Rissbildung unterhalb der kontaktierenden Oberflächen führen, bei weiterer zyklischer Beanspruchung sogar Verschleiß durch Oberflächenzerrüttung hervorrufen [61, 16]. Beim reinen Normalkontakt tritt das Maximum der Hauptschubspannung und damit die erste Plastizierung des Werkstoffes unterhalb der Oberfläche auf. Diese Erscheinung gilt sowohl für den Linienkontakt zweier Zylinder als auch für den Kugelkontakt allerdings variieren Ort und Größe des Extremums, was auf die grundsätzlich unterschiedlichen Eigenschaften von zwei- und dreidimensionalen Kontinua zurückzuführen ist (siehe dazu Abschnitt 4.1). Letzteres beinhaltet gerade die Schwierigkeit, die Feldgrößen innerhalb eines axialsymmetrisch beanspruchten Halbraumes aus einem Reduktionsprozess zu filtern. Selbstverständlich besteht die Möglichkeit – bei bereits ermittelter Kontaktdruckverteilung – mit Hilfe der dreidimensionalen Gewichtsfunktionen nach BOUSSINESQ [13] und CERRUTI [24] Spannungen und Verschiebungen im Inneren zu berechnen. Jenes bedeutet eine Kopplung des eindimensionalen numerischen Systems mit dreidimensionalen analytischen Integralgleichungen, dessen numerischer Berechnungsaufwand nicht zu unterschätzen ist.

Ich werde im folgenden ein Paket vorstellen, welches ohne die 3D-Gleichungen auskommt, dennoch für alle axialsymmetrischen Lastfälle sämtliche Feldgrößen im Inneren korrekt abbildet und damit zur Untersuchung von elastoplastischen Kontaktzuständen herangezogen werden kann. Trotz der Diskrepanz im Verhalten von ebenen und räumlichen elastischen Medien soll dazu ein zweidimensionales gewöhnliches Kontinuum (Halbebene) dienen; die Dimension wird in diesem Falle von “3” auf “2” reduziert. Eine Ankopplung an die WINKLERSche Bettung ist ohne weiteres möglich.

2.4.1 Bedeutung der Forminvarianz ebener und axialsymmetrischer Systeme inklusive der Erweiterung auf raue Indenter

In Kapitel 2.3.2 wurde bereits auf die Ähnlichkeit der Bestimmungsgleichungen für die Feldgrößen bei einem ebenen und axialsymmetrischen Belastungszustand aufmerksam gemacht (Man vergleiche dazu (2.30)-(2.35) mit (2.64)), der Kontakt allerdings dabei als reibungsfrei angenommen. Die folgende Abhandlung löst sich zunächst von dieser Einschränkung, d.h. auch Tangentialspannungen an der Oberfläche $q(r)$ sind zulässig, solange sie *radial*²⁵ verlaufen. Wir werden sehen, dass die Forminvarianz dadurch nicht gestört wird. Auf eine vollständige Herleitung der durch das Auftreten von Reibspannungen erweiterten Lösungsintegrale sei verzichtet, der Leser muß dazu lediglich die FOURIER-Transformierte der AIRYSchen Spannungsfunktion bzw. die HANKEL-Transformierte der LOVESchen Verschiebungsfunktion den veränderten Randbedingungen anpassen und anschließend die Feldgrößen neu ermitteln – analog dem in dieser Arbeit für den *glatten* Normalkontakt aufgezeigten Weg.

Zum Spannungs- und Verschiebungsfeld bei Axialsymmetrie

Man beachte, dass sich sowohl die Radialspannungen $\sigma_{rr}(r, z)$ als auch die Umfangsspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}(r, z)$ aus je zwei Anteilen zusammensetzen, welche unterschiedlichen Transformationen genügen; die Oberflächenlasten transformieren sich nach $\bar{p}_0(\xi) := \mathcal{H}_0[p(r); \xi]$ und $\bar{q}_0(\xi) := \mathcal{H}_1[q(r); \xi]$:

$$\begin{bmatrix} 2G\mathcal{H}_1[u_r(r, z); \xi] \\ 2G\mathcal{H}_0[u_z(r, z); \xi] \\ \mathcal{H}_1[\tau_{rz}(r, z); \xi] \\ \mathcal{H}_0[\sigma_{zz}(r, z); \xi] \\ \mathcal{H}_0[\sigma_{rr}^I(r, z); \xi] \\ \mathcal{H}_1[-r\sigma_{rr}^{II}(r, z); \xi] \\ \mathcal{H}_0[\sigma_{\varphi\varphi}^I(r, z); \xi] \\ \mathcal{H}_1[r\sigma_{\varphi\varphi}^{II}(r, z); \xi] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^{-1}(-1+2\nu)+z \\ 2\xi^{-1}(1-\nu)+z \\ -\xi z \\ -1-\xi z \\ -1+\xi z \\ \xi^{-1}(-1+2\nu)+z \\ -2\nu \\ \xi^{-1}(-1+2\nu)+z \end{bmatrix} \bar{p}_0(\xi) e^{-\xi z} + \begin{bmatrix} 2\xi^{-1}(1-\nu)-z \\ -\xi^{-1}(1-2\nu)-z \\ -1+\xi z \\ +\xi z \\ 2-\xi z \\ 2\xi^{-1}(1-\nu)-z \\ 2\nu \\ 2\xi^{-1}(1-\nu)-z \end{bmatrix} \bar{q}_0(\xi) e^{-\xi z} \quad (2.86)$$

Zum Spannungs- und Verschiebungsfeld im ebenen Fall

Zunächst wird von einem ebenen Verzerrungszustand ausgegangen, dessen Überführung auf einen ebenen Spannungszustand leicht zu vollziehen ist (siehe Schaubild 2.8). Während die x -Achse horizontal verläuft, soll z analog dem axialsymmetrischen Fall senkrecht ins Innere weisen. Sämtliche Feldgrößen²⁶ unterliegen dabei noch der FOURIER-Transformation in ihrer allgemeinen Gestalt gemäß (B.1):

²⁵Aufgrund des eingangs vorausgesetzten *axialsymmetrischen Halbraums* können uniaxiale Reibspannungen mit dieser Theorie nicht behandelt werden!

²⁶Um rotationssymmetrische und planare Ausdrücke auseinanderhalten zu können, sind letztere zusätzlich durch $(.)^p$ gekennzeichnet.

$$\begin{bmatrix} 2G\tilde{u}_x^p(\lambda, z) \\ 2G\tilde{u}_z^p(\lambda, z) \\ \tilde{\tau}_{xz}^p(\lambda, z) \\ \tilde{\sigma}_{zz}^p(\lambda, z) \\ \tilde{\sigma}_{xx}^p(\lambda, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda^{-1}i(1-2\nu) + i\operatorname{sgn}(\lambda)z \\ 2|\lambda|^{-1}(1-\nu) + z \\ -i\lambda z \\ -1 - |\lambda|z \\ -1 + |\lambda|z \end{bmatrix} \tilde{p}^p(\lambda) e^{-\lambda z} + \begin{bmatrix} 2|\lambda|^{-1}(1-\nu) - z \\ i\lambda^{-1}(1-2\nu) + i\operatorname{sgn}(\lambda)z \\ -1 + |\lambda|z \\ -i\lambda z \\ -2i\operatorname{sgn}(\lambda) + i\lambda z \end{bmatrix} \tilde{q}^p(\lambda) e^{-\lambda z}. \quad (2.87)$$

Das erklärte Ziel, einen axialsymmetrischen Zustand über einen ebenen (bzw. dessen Rotation um die z -Achse) abzubilden, verlangt nun noch einige Symmetrieaussagen. Jene können wohl am besten nachvollzogen werden, wenn man symmetrisch zur z -Achse unter Beachtung der Schnittuferkonvention zwei Elemente der Halbebene herauschneidet. Dann ist sofort einzusehen, dass τ_{xz}^p antimetrisch und σ_{xx}^p sowie σ_{zz}^p achsensymmetrisch verlaufen müssen; ähnliches gilt für die Verschiebungen. Während die Normalverschiebung u_z^p gerade ist, muß u_x^p eine ungerade Funktion darstellen. Dies hat gewisse Vereinfachungen zur Folge, da die FOURIER-Transformierten der symmetrischen durch die FOURIER-Cosinus- und die der antimetrischen Größen durch die FOURIER-Sinus-Transformierten ersetzt werden dürfen; das Gleichungssystem (2.87) erhält dann folgende Gestalt:

$$\begin{bmatrix} 2G\mathcal{F}_s[u_x^p(x, z); \lambda] \\ 2G\mathcal{F}_c[u_z^p(x, z); \lambda] \\ \mathcal{F}_s[\tau_{xz}^p(x, z); \lambda] \\ \mathcal{F}_c[\sigma_{zz}^p(x, z); \lambda] \\ \mathcal{F}_c[\sigma_{xx}^p(x, z); \lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda^{-1}(1-2\nu) + z \\ 2\lambda^{-1}(1-\nu) + z \\ -\lambda z \\ -1 - \lambda z \\ -1 + \lambda z \end{bmatrix} p_c^p(\lambda) e^{-\lambda z} + \begin{bmatrix} 2\lambda^{-1}(1-\nu) - z \\ -\lambda^{-1}(1-2\nu) - z \\ -1 + \lambda z \\ \lambda z \\ 2 - \lambda z \end{bmatrix} q_s^p(\lambda) e^{-\lambda z}. \quad (2.88)$$

Der Vergleich von (2.86) und (2.88) zeigt eine exakte Formgleichheit für die ersten vier skalarwertigen Gleichungen auf – selbstverständlich dürfen die unterschiedlichen Bildtransformationen nicht außer Acht gelassen werden. Jene Invarianz räumt die Möglichkeit ein, zwischen ebenen und axialsymmetrischen Systemen zu vermitteln, wobei die Beziehung zwischen den transformierten Oberflächenspannungen die Art des Abbildungsprozesses bestimmt. Eine Perspektive scheint die unmittelbare Wahl²⁷

$$\bar{p}_0(\xi) \equiv \mathcal{H}_0[p_0(r); \xi] \stackrel{!}{=} b p_c^p(\xi) \equiv b \mathcal{F}_c[p^p(x); \xi] \quad (2.89)$$

$$\bar{q}_0(\xi) \equiv \mathcal{H}_1[q_0(r); \xi] \stackrel{!}{=} b q_s^p(\xi) \equiv b \mathcal{F}_s[q^p(x); \xi] \quad (2.90)$$

zu sein, nach der die Randlasten im Frequenzraum übereinstimmen. Die hieraus resultierenden Konsequenzen werde ich beispielhaft anhand der ersten skalaren Gleichung (also für u_x^p) erläutern, die weiteren dann lediglich angeben. Wichtiges Instrument spielen dabei die zwischen HANKEL- und FOURIER-Transformation vermittelnden Beziehungen (A.9) und (A.10). Rücktransformation der ersten Zeile von (2.88) ergibt

²⁷Der Normierungsfaktor b soll dabei die Gleichheit der Maßeinheiten sicherstellen.

$$\begin{aligned}
2Gu_x^p(x, z) &= \mathcal{F}_s \left[(-\lambda^{-1}(1-2\nu) + z) p_c^p(\lambda) e^{-\lambda z} + (2\lambda^{-1}(1-\nu) - z) q_s^p(\lambda) e^{-\lambda z}; x \right] \\
&\stackrel{(A.10)}{=} x \mathcal{A}_2 \{ \mathcal{H}_1 \left[(-\lambda^{-1}(1-2\nu) + z) p_c^p(\lambda) e^{-\lambda z} + (2\lambda^{-1}(1-\nu) - z) q_s^p(\lambda) e^{-\lambda z}; r \right]; x \} \\
&\stackrel{(2.89), (2.90)}{=} \underbrace{\frac{x}{b} \mathcal{A}_2 \{ \mathcal{H}_1 \left[(-\lambda^{-1}(1-2\nu) + z) \bar{p}_0(\lambda) e^{-\lambda z} + (2\lambda^{-1}(1-\nu) - z) \bar{q}_0(\lambda) e^{-\lambda z}; r \right]; x \}}_{=2Gu_r(r, z)},
\end{aligned}$$

so dass in Ergänzung für die ersten vier Einträge letztendlich nachstehende Transformationen mit zugehörigen Inversionen zutreffen.

Korrespondenz – Teil I –

$$\begin{aligned}
u_x^p(x, z) &= b^{-1} x \mathcal{A}_2 [u_r(r, z); x] & u_r(r, z) &= b \mathcal{A}_2^{-1} [x^{-1} u_x^p(x, z); r] \\
u_z^p(x, z) &= b^{-1} \mathcal{A}_2 [r u_z(r, z); x] & u_z(r, z) &= b r^{-1} \mathcal{A}_2^{-1} [u_z^p(x, z); r] \\
\tau_{xz}^p(x, z) &= b^{-1} x \mathcal{A}_2 [\tau_{rz}(r, z); x] & \tau_{rz}(r, z) &= b \mathcal{A}_2^{-1} [x^{-1} \tau_{xz}^p(x, z); r] \\
\sigma_{zz}^p(x, z) &= b^{-1} \mathcal{A}_2 [r \sigma_{zz}(r, z); x] & \sigma_{zz}(r, z) &= b r^{-1} \mathcal{A}_2^{-1} [\sigma_{zz}^p(x, z); r]
\end{aligned}$$

Tabelle 2.1: Zur wechselseitigen Berechnung ebener und axialsymmetrischer Größen – Teil I

Zur Ermittlung der Radialspannungen σ_{rr} reicht nicht allein aus, die quasi-analogen Spannungen σ_{xx} in der obigen Vorgehensweise zu formen, denn das liefert nur den Beitrag σ_{rr}^I ; der angesprochene zusätzliche Anteil σ_{rr}^{II} muß auch noch erzeugt werden. In Verbindung mit den radialen Verschiebungen stellt dieses aber keinerlei Schwierigkeit dar. In ähnlicher Weise können die Ringspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$ aus ebenen Größen zusammengesetzt werden. Während sich der zweite Part bis auf das Vorzeichen mit dem entsprechenden der Radialspannungen deckt, erfordert ersterer eine Kombination ebener Normalspannungen. Interessanterweise entspringt jener einer Abbildung der aus einem EVZ hervorgehenden und bis jetzt ignorierten Normalspannung in Dickenrichtung $\sigma_{yy} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$. Die Erkenntnisse für die zweigliedrigen Ausdrücke möchte ich in Erweiterung obiger Korrespondenztabelle berücksichtigen. Es sei darauf hingewiesen, dass im Zuge eines der später untersuchten elastoplastischen Beispielkontakte die Darstellung der Umfangsspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$ nicht fehlen darf, auch wenn diese speziell für den HERTZschen Kontakt kaum von Bedeutung sind.²⁸

²⁸Diese Aussage ist streng mit dem später verwendeten Vergleichskriterium nach TRESCA verknüpft!

Korrespondenz – Teil II –

$$\begin{array}{ll}
\sigma_{xx}^p(x, z) = b^{-1} \mathcal{A}_2 [r \sigma_{rr}^I(r, z); x] & \sigma_{rr}^I(r, z) = b r^{-1} \mathcal{A}_2^{-1} [\sigma_{xx}^p(x, z); r] \\
\sigma_{yy}^p(x, z) = b^{-1} \mathcal{A}_2 [r \sigma_{\varphi\varphi}^I(r, z); x] & \sigma_{\varphi\varphi}^I(r, z) = b r^{-1} \mathcal{A}_2^{-1} [\sigma_{yy}^p(x, z); r] \\
\sigma_{rr}^{II}(r, z) = -2Gb r^{-1} \mathcal{A}_2^{-1} [x^{-1} u_x^p(x, z); r] & \\
\sigma_{\varphi\varphi}^{II}(r, z) = 2Gb r^{-1} \mathcal{A}_2^{-1} [x^{-1} u_x^p(x, z); r] &
\end{array}$$

Tabelle 2.2: Zur wechselseitigen Berechnung ebener und axialsymmetrischer Größen – Teil II

Man beachte hierin einerseits die aus dem HOOKESchen Gesetz (EVZ) stammende Beziehung

$$\sigma_{yy}^p(x, z) := \nu [\sigma_{xx}^p(x, z) + \sigma_{zz}^p(x, z)] , \quad (2.91)$$

zum anderen die Darstellungsmöglichkeit der Spannungszusätze (Index II) über die Radialverschiebung gemäß

$$\sigma_{rr}^{II}(r, z) = -\sigma_{\varphi\varphi}^{II}(r, z) = -r^{-1} 2G u_r(r, z) . \quad (2.92)$$

Vor ihrer Anwendung in einem folgenden Abschnitt soll die Aussagekraft obiger Tabelle kurz noch einmal erläutert werden. Stellen wir uns dazu vor, dass eine gegebene axialsymmetrische Spannungsverteilung $p(r)$, $q(r)$ auf einen elastischen Halbraum wirke und die Felder im Inneren zu berechnen sind. Sehr wohl könnten wir auf die Superposition der 3D-Fundamentallösungen zurückgreifen, möchten jedoch im Sinne der *Dimensionsreduktion* handeln. Dazu müssen in einem ersten Schritt die Spannungen an der Oberfläche nach den entsprechenden Einträgen auf der linken Seite in Tabelle 2.1 transformiert werden:

$$b q^p(x) = x \mathcal{A}_2 [q(r); x] \quad (2.93)$$

$$b p^p(x) = \mathcal{A}_2 [r p(r); x] . \quad (2.94)$$

Die elastischen Eigenschaften des axialsymmetrisch beanspruchten Halbraums ausgedrückt über E und ν dürfen nur solange beibehalten werden, wie ein EVZ als Ersatzmodell unterstellt wird; ein geeigneter Reduktionsprozess verbunden mit der Einsparung von Freiheitsgraden setzt jedoch einen ESZ voraus, so dass die elastischen Parameter äquivalent auf eine Halbscheibe umzurechnen sind. Auf eine solche zweidimensionale Halbebene werden nun die Streckenlasten nach (2.93), (2.94) aufgeprägt und die resultierenden ebenen Spannungs- und Verschiebungskomponenten im Inneren abgegriffen. Da die aufgezeigte Korrespondenz einem analytischen Beweis folgt, dessen Ausgangspunkt die Kontinuumstheorie bildete, ist sie unabhängig von jedweder Diskretisierung gültig. So könnte der letztgenannte Arbeitsschritt beispielsweise mit einer zweidimensionalen *Finite Elemente Methode* oder auch einem *Isotropen Gittermodell* (siehe Kapitel 5) erfolgen. Die so gewonnenen *quasi-fiktiven* Größen sind im Anschluß lediglich einer Rücktransformation gemäß rechter Spalte aus Tabelle 2.1 bzw. 2.2 zu unterziehen und bilden exakt die dreidimensionalen Felder ab.

Die Abbildungsvorschriften hängen entscheidend von der angesetzten Beziehung zwischen den Randlasten im Bildraum ab – siehe Gleichungen (2.89), (2.90); bei einer Forderung

$$\bar{p}_0(\xi) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\xi} p_c^p(\xi) \quad (2.95)$$

$$\bar{q}_0(\xi) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\xi} q_s^p(\xi) \quad (2.96)$$

würde die ABEL-Transformation 1. Art tonangebend sein und beispielsweise für die Normal- bzw. Tangentialspannungen zu den Gesetzmäßigkeiten

$$\sigma_{zz}(r, z) = \mathcal{A}_1[\sigma_{zz}^p(x, z); r] \quad (2.97)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = r^{-1} \mathcal{A}_1[x \tau_{xz}^p(x, z); r] \quad (2.98)$$

führen. Bedauerlicherweise bin ich nicht der erste, welcher bei der Suche nach einer einfachen eleganten Methode zur Lösung axialsymmetrischer Problemstellungen auf derartige Transformationen stößt. Die Pionierarbeit geht vermutlich auf A. Ia. ALEKSANDROV [2] zurück, der den axialsymmetrischen Fall aus der Superposition rotierter ebener Zustände zusammensetzt, darüberhinaus auch eine Möglichkeit vorstellt, planare Felder mittels Umverteilung drehsymmetrischer Größen (auf eine Linie) zu gewinnen – seine Ansätze gründen demnach auf physikalischen Interpretationen. Eine weitere rein analytische Ableitung basierend auf der Analogie der PAPKOVICH-NEUBER Lösungen ist in [39] zu finden²⁹. Die im Zuge der Verknüpfung zweidimensionaler und axialsymmetrischer Problemstellungen zitierte Arbeit von NOBLE und SPENCE [75] beinhaltet hingegen nur die Spannungen und Verschiebungen an der Oberfläche, für die inneren Felder werden keinerlei Aussagen getroffen.

Die Forminvarianz der Gleichungssysteme (2.86) und (2.88) bezieht sich zunächst auf unendlich ausgedehnte elastische Medien, für welche nur abklingende Lösungsanteile $\sim e^{-\xi z}$ auftreten. Hat man es dagegen mit begrenzten Kontinua zu tun, werden anfachende Glieder $\sim e^{\xi z}$ keinesfalls verschwinden. Es ist jedoch sofort einsichtig, dass die Formanalogie auch auf solche Körper ausgedehnt werden darf. Die Gültigkeit der Korrespondenztabelle 2.1, 2.2 bzw. der nur angesprochenen (nicht vollständig aufgeführten) Alternative (2.97), (2.98) bleibt uneingeschränkt. So kann beispielsweise ein *planarer Streifen* dazu dienen, um die Indentierung einer *axialsymmetrischen Schicht* zu beschreiben; auch *mehrfach geschichtete Halbräume* können derart abgebildet werden, unter bestimmten Voraussetzungen sogar *inhomogene Medien* (Kapitel 4). Bevor es im nächsten Abschnitt um die Anbindung an das eindimensionale Modell geht, möchte ich zusammenfassend festhalten:

Mit Hilfe der in diesem Kapitel erarbeiteten Korrespondenzen können axialsymmetrische über planare Zustände ausgedrückt werden. Dazu sind zunächst die Randlasten zu überführen und anschließend auf eine Halbscheibe aufzuprägen; deren Spannungen und Verschiebungen sind im Anschluss einer ABEL-Rücktransformation zu unterziehen. Zusätzlicher Aufwand stellt damit die Berechnung der Linienintegrale dar. Anstelle eines dreidimensionalen Halbraumes muß im Rahmen einer numerischen Umsetzung allerdings nur eine Halbscheibe diskretisiert werden, was mit dem Wegfall der Freiheitsgrade einer ganzen Dimension einhergeht!

2.4.2 Schnittstelle zum eindimensionalen Federmodell bei reinem Normalkontakt

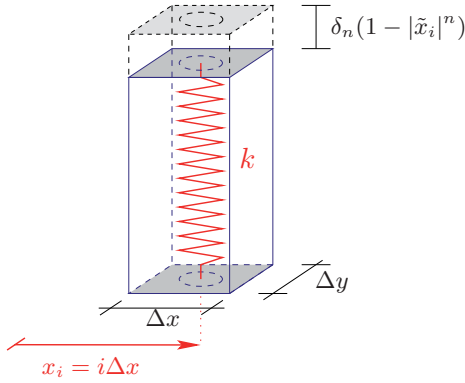
Das detailliert beschriebene Federmodell legt eine reine Normalbelastung zu Grunde, auf die ich mich in der Folge konzentrieren möchte. In den Gleichungssystemen nach (2.86) und (2.88) sind

²⁹In beiden Werken [2, 39] sind die Formulierungen hinsichtlich der Maßeinheiten zum Teil fehlerbehaftet!

demnach die Tangentialbeanspruchungen gleich Null zu setzen – die Abbildungsvorschriften (Korrespondenzen) werden hierdurch nicht gestört. Mitunter ist das eindimensionale System durch eine gegenüber dem Original veränderte Geometrie gekennzeichnet. Die Normalkraft P_n konnte durch einfaches Summieren über die Federkräfte F_i rekonstruiert werden:

$$P_n = \sum_{i=-j}^j F_i = \sum_{i=-j}^j k \delta_n (1 - |\tilde{x}_i|^n); \quad (2.99)$$

die zugehörige Definition der Federspannungen $p_{n,i}^F$ hatte ich durch den Bezug auf die sich aus der Diskretisierungsbreite und Tiefe der Schicht ergebende Fläche definiert (siehe Abbildung 2.12).³⁰



Zur Federspannung:

$$\begin{aligned} p_{n,i}^F(x_i) &:= \frac{F_i}{\Delta x \Delta y} \\ &= \frac{k}{\Delta x \Delta y} \delta_n (1 - |\tilde{x}_i|^n) \\ &= \frac{\tilde{E}}{\Delta y} \delta_n (1 - |\tilde{x}_i|^n) \end{aligned}$$

Abbildung 2.12: Zur Federkinematik im 1D-Modell (links); Definition der zugehörigen Federspannung (rechts)

Die Diskretisierungsbreite Δx bildet den Quotienten aus Kontaktradius a und Anzahl der äquidistanten Intervalle j zwischen $x = 0$ und $x = a$, also gilt $\Delta x = a/j$.

Selbstverständlich geben diese Federspannungen nicht die Normalbelastung an der Oberfläche im realen System wieder, was die Gleichung (2.82) bestätigt. Dass diesen (diskretisierten) Größen aber noch eine wesentliche Bedeutung zukommt, wird die Verbindung zur Korrespondenztabelle und damit zu den planaren Gegebenheiten eindrucksvoll unter Beweis stellen. Zunächst denken wir uns die Schrittweite Δx sehr klein und gehen damit vom diskreten Modell auf die elastische Bettung über. Für die Spannungen dieses nun kontinuierlichen eindimensionalen Modells kann man auf oben genanntem Weg einen *besonderen Zusammenhang* ableiten

$$\begin{aligned} p_n^F(x) &:= \frac{\tilde{E}}{\Delta y} \delta_n (1 - |\tilde{x}|^n) \\ &\stackrel{(2.82)}{=} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta y} \mathcal{A}_2 [r p_n(r); x] \\ &\stackrel{\text{Tabelle 2.1}}{=} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta y} b p^p(x), \end{aligned} \quad (2.100)$$

der nach Setzung von $b := \Delta y$ lautet

$$\boxed{p^p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} p_n^F(x)}. \quad (2.101)$$

Gleichung (2.101) zeigt geradewegs die Schnittstelle zwischen den aus der Forminvarianz entwickelten Relationen ebener und axialsymmetrischer Felder und dem eindimensionalen Modell auf. Um die

³⁰Zur Erinnerung: Der Index n war Kennzeichen einer Parabel n -ten Grades; eine Superposition ist möglich.

Feldgrößen im Inneren mit Hilfe der Korrespondenzen zu berechnen, mußte in einem ersten Schritt die 3D-Oberflächenlast auf eine 2D-Beanspruchung umgerechnet werden. Genau darauf können wir nun verzichten, denn *die Federspannungen des eindimensionalen Modells dividiert durch den Wert $\sqrt{2\pi}$ sind den ebenen Lasten äquivalent!* Die Kenntnis der Flächenpressung des Originals ist damit nicht erforderlich, um die Spannungen und Verschiebungen im Inneren des Originals zu bestimmen. Nach Aufprägung der faktorisierten Federspannungen auf eine isotrope Halbscheibe und Abgreifen des kinematischen und dynamischen Feldes liefern die rechten Spalteneinträge der Tabellen 2.1, 2.2 sämtliche Größen der dreidimensionalen Problemstellung – natürlich inklusive Flächenpressung! Nur wenn das ausschließliche Interesse dieser galt, dann ist deren Berechnung nach (2.81) zweckmäßig. Anhand des direkten Zusammenhangs zwischen Feder- und Originalspannung möchte ich noch eine ergänzende Anmerkung machen

$$\Delta y p_n^F(x) = \sqrt{2\pi} \mathcal{A}_2 [r p_n(r); x] =: \mathcal{A}_{Br} [p_n(r); x] \quad (2.102)$$

$$p_n(r) = \frac{\Delta y}{\sqrt{2\pi}} r^{-1} \mathcal{A}_2^{-1} [p_n^F(x); r] =: \Delta y \mathcal{A}_{Br}^{-1} [p_n^F(x); r] . \quad (2.103)$$

Anstelle der in dieser Arbeit verwendeten Definition für die ABEL-Transformation ist in der Literatur häufig eine auf BRACEWELL zurückgehende zu finden (\mathcal{A}_{Br} , \mathcal{A}_{Br}^{-1}). Er benötigte solche Abbildungen in der Radioastronomie, um Radiowellen aus Messungen zu reproduzieren und teilte in seiner Arbeit [15] den notwendigen mathematischen Apparat³¹ mit, der auch für verwandte Problemstellungen in anderen Wissenschaftsfeldern von Bedeutung war. Er wurde u.a. einige Jahre später von HOUNSFIELD [46] zur Rekonstruktion von Querschnittsbildern des Körpers aus multiplen Absorptionsdaten genutzt und legte so das Fundament für die Computertomographie.

Im nächsten Abschnitt werden die soeben abgeleiteten Korrespondenzen dazu genutzt, um axialsymmetrische Felder zu berechnen. Bevor dies geschieht, soll noch eine Normierung stattfinden, nach welcher die Flächenpressung stets auf den mittleren Druck \bar{p} zu beziehen ist. Mit Hilfe von (2.42) und (2.43) ergibt sich dieser zu

$$\bar{p}_n := \frac{P_n}{A} = \frac{2n}{n+1} \frac{\delta_n}{\pi a} \tilde{E} . \quad (2.104)$$

Die transformierte zweidimensionale Last nimmt in der normierten Form unter Berücksichtigung der Federspannungen die nachfolgende Gestalt an, welche eine numerische Umsetzung vorbereiten soll

$$\frac{p^p(x)}{\bar{p}_n} \stackrel{(2.101)}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p_n^F(x)}{\bar{p}_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi \frac{n+1}{2n} \frac{a}{b} (1 - |\tilde{x}|^n) . \quad (2.105)$$

Während a darin den Kontaktradius angibt, stellt die Einheitslänge (in Dickenrichtung) b lediglich die Korrektheit der Maßeinheiten sicher. Selbstverständlich wird diese Beziehung im Rahmen eines Programmpaketes zur vollständigen Charakterisierung eines Kontaktes nicht gebraucht; sie fällt automatisch vorher ab. Da im nächsten Punkt jedoch nur der eine Schritt – die Berechnung der axialsymmetrischen Felder mittels eines planaren Modells – numerisch geprüft wird, benötigen wir das Zwischenergebnis (2.105) als Input. Ein Algorithmus zur Bestimmung sämtlicher lokaler und globaler Größen eines kontaktmechanischen Zustandes, welcher allein auf Basis der Dimensionsreduktion funktioniert, wird abschließend in Abschnitt 2.5 formuliert.

³¹Obwohl seine mathematischen Ausführungen weitaus geringer ausfielen, möchte ich in diesem Zusammenhang auch nochmal an Weber erinnern (siehe Abbildung 2.10).

2.4.3 Anwendung auf den elastoplastischen Normalkontakt

Für einige wichtige Indentergeometrien (HERTZ, Kegel, flacher zylindrischer Stempel) wird der elastoplastische Kontakt mit Hilfe der *Dimensionsreduktion von Drei auf Zwei* beschrieben und die Ergebnisse mit in der Literatur zu findenden analytischen Lösungen verglichen. Die Plastizität soll sich dabei auf ein erstmaliges Fließen beziehen; *Shakedown*-Effekte werden nicht betrachtet. Abkürzend führe ich einen neuen Parameter γ_n ein, der den Einfluß der Ordnung n auf den normierten Druck nach (2.105) beinhaltet

$$\gamma_n := \frac{n+1}{2n}\pi. \quad (2.106)$$

HERTZscher Kontakt einer Kugel mit dem elastischen Halbraum

Dass für jenen Punktkontakt die Oberflächenform durch ein Rotationsparaboloid angenähert wird, ist allseits bekannt. Hertz [45] hatte zwar die Zusammenhänge makroskopischer Größen entwickelt, die explizite Berechnung des Spannungsfeldes im Inneren des Körpers blieb er aber schuldig, bezeichnete diese sogar als kaum durchführbar. Kurze Zeit später präsentierte HUBER in [48] eine analytische Lösung³², welche ich als Vergleichslösung nutze

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}(r, z)}{\bar{p}} &= \frac{3}{2} \left\{ \frac{1-2\nu}{3} \frac{a^2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}} \right)^3 \right] + \left(\frac{z}{\sqrt{u}} \right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2} \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{z}{\sqrt{u}} \left[\frac{(1-\nu)u}{u+a^2} + (1+\nu) \frac{\sqrt{u}}{a} \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\frac{\tau_{rz}(r, z)}{\bar{p}} = -\frac{3}{2} \frac{r z^2}{u^2 + a^2 z^2} \frac{a^2 \sqrt{u}}{u + a^2} \quad (2.108)$$

$$\frac{\sigma_{zz}(r, z)}{\bar{p}} = -\frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{u}} \right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2}, \quad (2.109)$$

$$\text{mit der Abkürzung } u(r, z) := \frac{1}{2} \left[r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2} \right].$$

Diese Felder³³ sind auf der linken Seite in Abbildung 2.13 für eine Querdehnzahl von $\nu = 0.3$ geplottet, rechterhand hingegen die Lösungen aus dem Reduktionsmodell.

³²Weiterführende Analysen enthält [73].

³³Da die Ringspannungen für das später verwendete Vergleichskriterium – im Falle des HERTZ-Kontaktes – nur von untergeordneter Bedeutung sind, wurde auf deren Darstellung verzichtet.

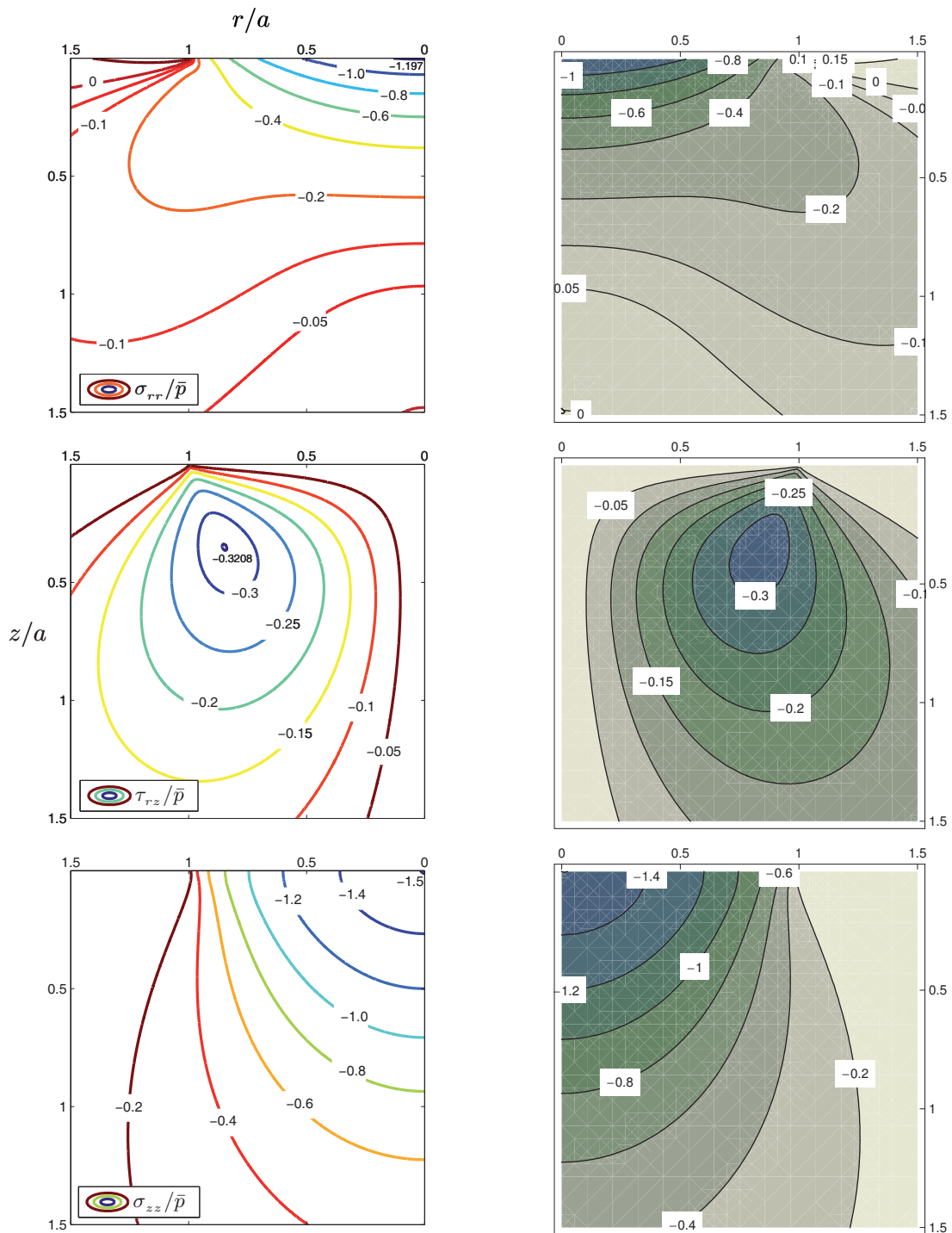


Abbildung 2.13: Spannungen im Halbraum für den HERTZschen Kugelkontakt ($\nu = 0.3$): Analytische Lösungen (links); Lösungen des Reduktionsmodells (rechts).

Zur Durchführung des Reduktionsprozesses wurden zunächst die mit der dreidimensionalen Härte normierten (und zusätzlich durch $\sqrt{2\pi}$ dividierten) Federspannungen nach (2.105) für $n = 2$ aufgestellt. Diese quasi-fiktive Größe bildet die Eingangslast, welche der Halbscheibe aufzuprägen ist. Die anschließende Berechnung der ebenen Felder ist dabei an keinerlei (diskrete) Lösungsverfahren (FEM, MPS, MCA) gebunden; eine Anwendung von elastischen Gittermodellen wird in Kapitel 5 erfolgen. An dieser Stelle habe ich auf eine Diskretisierung verzichtet und stattdessen die FOURIER-

Integrale (2.64) mit Hilfe der Software MATHEMATICA gelöst. Auch die Ausführung der anschließenden ABEL-Transformationen (siehe Korrespondenztabelle 2.1, 2.2) mittels numerischer Integration wurden jenem Programm überlassen. Die so erzeugten axialsymmetrischen Spannungsgrößen bestätigen eindrucksvoll die Gültigkeit des in Abschnitt 2.4.1 abgeleiteten Reduktionsverfahrens (siehe Abbildung 2.13); bis auf Fehler resultierend aus der numerischen Integration *liefert das zweidimensionale Abbild die Ergebnisse für das dreidimensionale Original!*³⁴ Selbstverständlich werden auch die Spannungsgrößen innerhalb der Oberfläche (bzw. entlang der Tiefenachse z) korrekt dargestellt; Abbildung 2.14 untermauert dies durch die Wiedergabe der charakteristischen Merkmale: Die HERTZsche Druckverteilung, radiale Druckspannungen innerhalb sowie Zugspannungen außerhalb des Kontaktgebietes, welche ihr Maximum am Kontaktflächenrand erreichen und u.a. Auslöser für die nach HERTZ benannten Kegelbrüche [62] bei spröden Materialien sind.

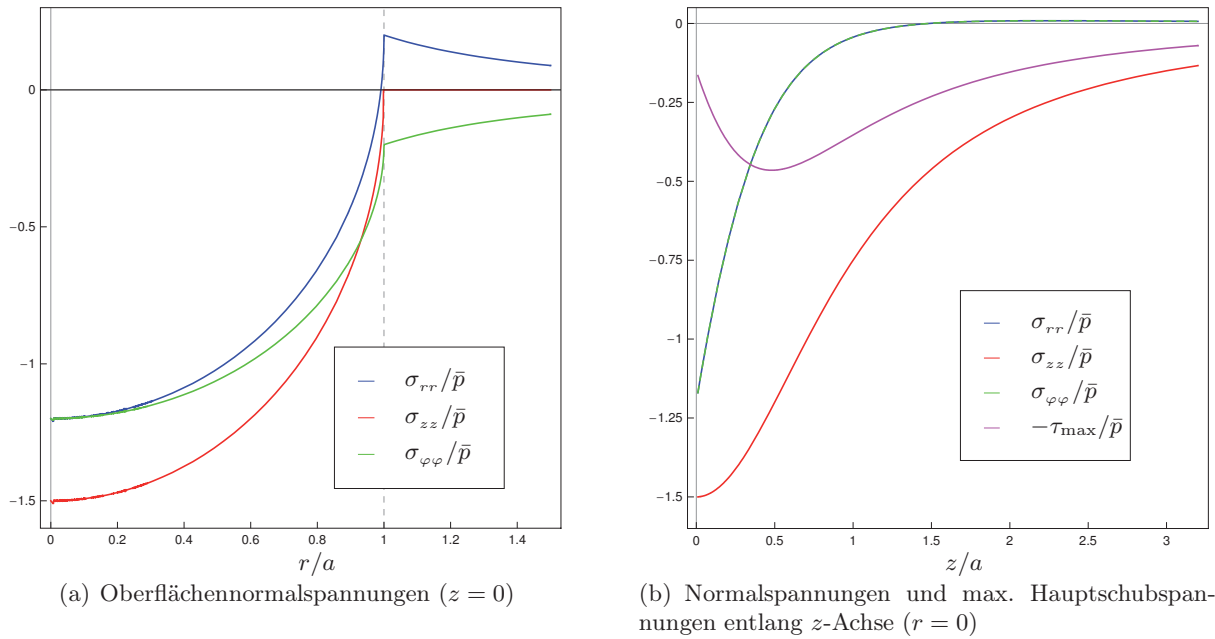


Abbildung 2.14: Spannungsgrößen in der Oberfläche ($z = 0$) und entlang der Hauptachse z ($r = 0$) für den HERTZschen Kugelkontakt bei $\nu = 0.3$, erzeugt mit Hilfe des reduzierten Ersatzmodells!

Aus den einzelnen graphisch veranschaulichten Spannungskomponenten können nun allerdings noch keine direkten Rückschlüsse für das plastische Verhalten isotroper Werkstoffe gezogen werden. Dazu ist zunächst ein Fließkriterium zu generieren, welches experimentell gestützt nicht vom hydrostatischen Spannungszustand abhängt und wesentlich von der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators [98] beeinflusst wird. In dieser Arbeit soll aufgrund ihrer Einfachheit die Fließbedingung von TRESCA Anwendung finden:

$$\text{Max} [|\tau_I|, |\tau_{II}|, |\tau_{III}|] \leq \frac{1}{2}\sigma_F. \quad (2.110)$$

Hiernach treten bleibende Verformungen auf, wenn die (betragsmäßig) maximalen Hauptschubspannungen eine kritische Grenze überschreiten. Jener Wert entspricht der Schubspannung, welche für den einachsigen Zugversuch einer Probe des gleichen Materials Fließen auslöst. Für einen allgemei-

³⁴Dies gilt auch für die hier nicht visualisierten Umfangsspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$.

nen axialsymmetrischen Zustand ergeben sich nach einer Diagonalisierung des Spannungstensors (Hauptachsentransformation) folgende Hauptspannungen

$$\begin{aligned}\sigma_I(r, z) &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr}(r, z) + \sigma_{zz}(r, z)) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{rr}(r, z) - \sigma_{zz}(r, z)}{2}\right)^2 + \tau_{rz}(r, z)^2} \\ \sigma_{II}(r, z) &= \sigma_{\varphi\varphi}(r, z) \\ \sigma_{III}(r, z) &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr}(r, z) + \sigma_{zz}(r, z)) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{rr}(r, z) - \sigma_{zz}(r, z)}{2}\right)^2 + \tau_{rz}(r, z)^2},\end{aligned}\quad (2.111)$$

deren Differenzen die Hauptschubspannungen ausmachen

$$\begin{aligned}\tau_I(r, z) &= \frac{1}{2}(\sigma_I(r, z) - \sigma_{III}(r, z)) \\ \tau_{II}(r, z) &= \frac{1}{2}(\sigma_{II}(r, z) - \sigma_{III}(r, z)) \\ \tau_{III}(r, z) &= \frac{1}{2}(\sigma_I(r, z) - \sigma_{II}(r, z)).\end{aligned}\quad (2.112)$$

Die betragsmäßig maximale Hauptschubspannung im Falle des Kugelkontaktes bildet τ_I ; sie ist unabhängig von den Umfangsspannungen, wodurch nun nachvollziehbar ist, warum wir auf deren Verlauf verzichtet haben.

Für die Auswertung des Vergleichskriteriums sind die Spannungsfelder im Inneren maßgebend. Diese wurden mit dem Reduktionsmodell richtig wiedergegeben, so dass es zweifellos auch einer korrekten Berechnung der maximalen Anstrengung des Materials genügt.

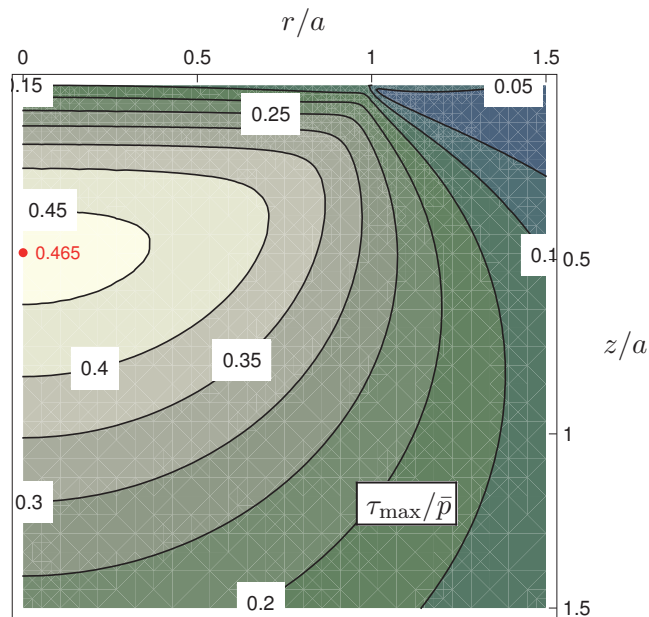


Abbildung 2.15: Linien gleicher (maximaler) Hauptschubspannungen $\tau_{\max} = \tau_I$ beim HERTZschen Kugelkontakt für eine POISSONZahl von $\nu = 0.3$.

Abbildung 2.15 veranschaulicht den Verlauf der maximalen Hauptschubspannungen; ihr Maximum liegt auf der z -Achse in einer Tiefe $z \approx 0.48 a$ und beträgt $\text{Max}[\tau_{\max}(r, z)] \approx 0.465 \bar{p}$, was sich mit den in der Literatur [53] angegebenen Werten deckt (siehe auch Abbildung 2.14 b). Aufgrund ihrer deutlich vom Kugelkontakt abweichenden Natur soll noch das Verhalten zweier weiterer Indenterformen mit Hilfe des Reduktionskonzeptes verifiziert werden.

Kontakt eines kegelförmigen Indenters mit dem elastischen Halbraum

Von einer expliziten Auflistung der analytischen (unhandlichen) Lösungen für den Halbraumkontakt eines konischen Indenters möchte ich absehen und auf die Literatur³⁵ [106, 56] verweisen. Selbstverständlich wurden diese von mir geplottet und mit den Ergebnissen des Reduktionsmodells verglichen: Wiederum war kein Unterschied festzustellen! Jene aus dem Ersatzmodell gewonnenen Resultate werden im folgenden grafisch veranschaulicht und kurz diskutiert. So sieht man in Abbildung 2.16 das Spannungsfeld, wobei der Konturplot die Singularität der Normalspannungen σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} an der Kontaktspitze ($z = 0$, $r = 0$) leider nicht hergibt.

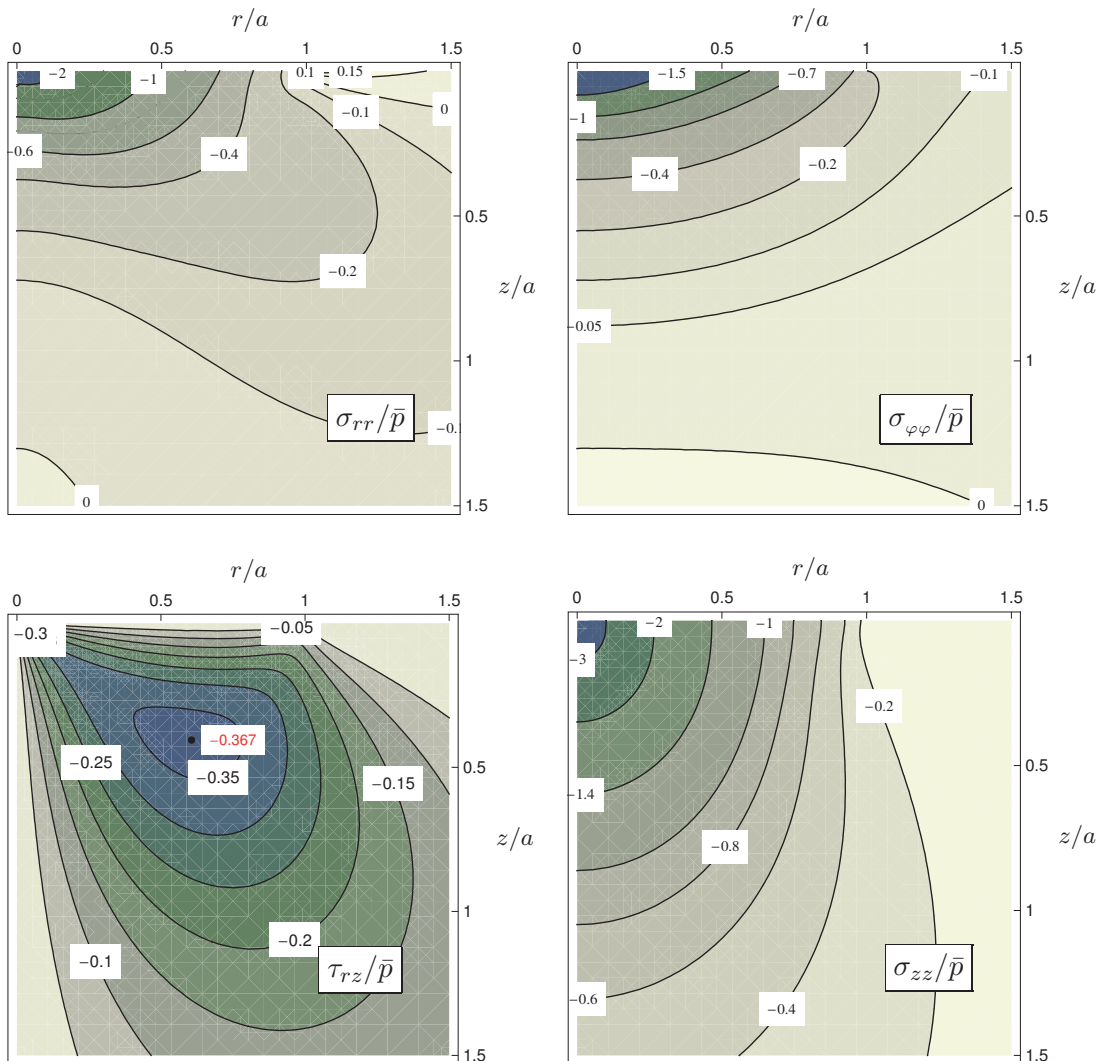


Abbildung 2.16: Spannungsfelder im Halbraum für den Kontakt mit einem kegelförmigen Indenter ($\nu = 0.3$); Lösungen wurden mit dem Reduktionsmodell generiert.

Gleiches gilt für die maximalen Hauptschubspannungen (Abbildung 2.17), die erneut durch τ_I repräsentiert werden. Das Spannungsmaximum fällt unmittelbar in Oberflächennähe sehr rasch ab, weshalb plastische Verformung zunächst nur direkt an der Konusspitze auftritt. Diese Erscheinung ist deutlich in Abbildung 2.18 (b) zu erkennen; aufgrund der numerischen Integration kann das Wesen

³⁵Die Pionierarbeit lieferte LOVE [65], auch wenn er die Felder nicht explizit berechnete!

der Singularität nicht vollends aufgezeigt werden³⁶ (Abbruch der magenta-hervorgehobenen Linie). Entlang der z -Achse treten keine Schubspannungen τ_{rz} auf, weshalb die Normalspannungen zugleich Hauptspannungen darstellen. Die Radial- und Umfangsspannungen sind dabei identisch und erreichen in einer bestimmten Tiefe sogar schwach-positive Werte; σ_{zz} weist hingegen überall Druck auf. Erwähnenswert ist noch der Sonderfall eines inkompressiblen Materials ($\nu = 0.5$), denn bei solchem verschwindet die logarithmische Asymptote und τ_I bleibt überall finit [53]. Auffällig ist auch die Dynamik innerhalb der Oberfläche außerhalb des Kontaktgebietes (siehe Abbildung 2.18 (a)), denn diese ähnelt nicht nur derjenigen des (genäherten) Kugelkontaktes, sondern spiegelt exakt dessen Verläufe wieder.

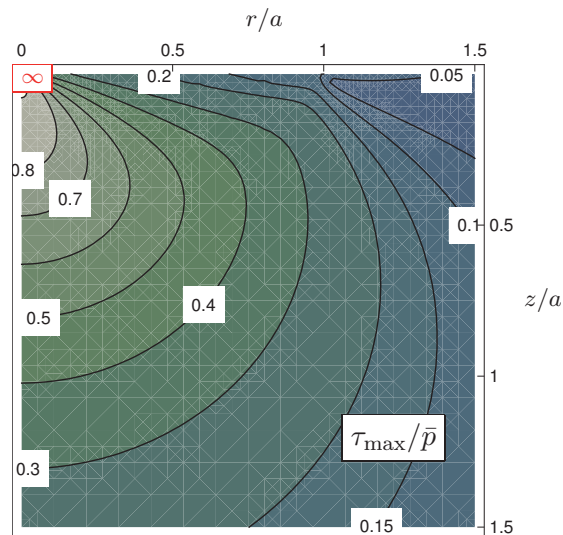
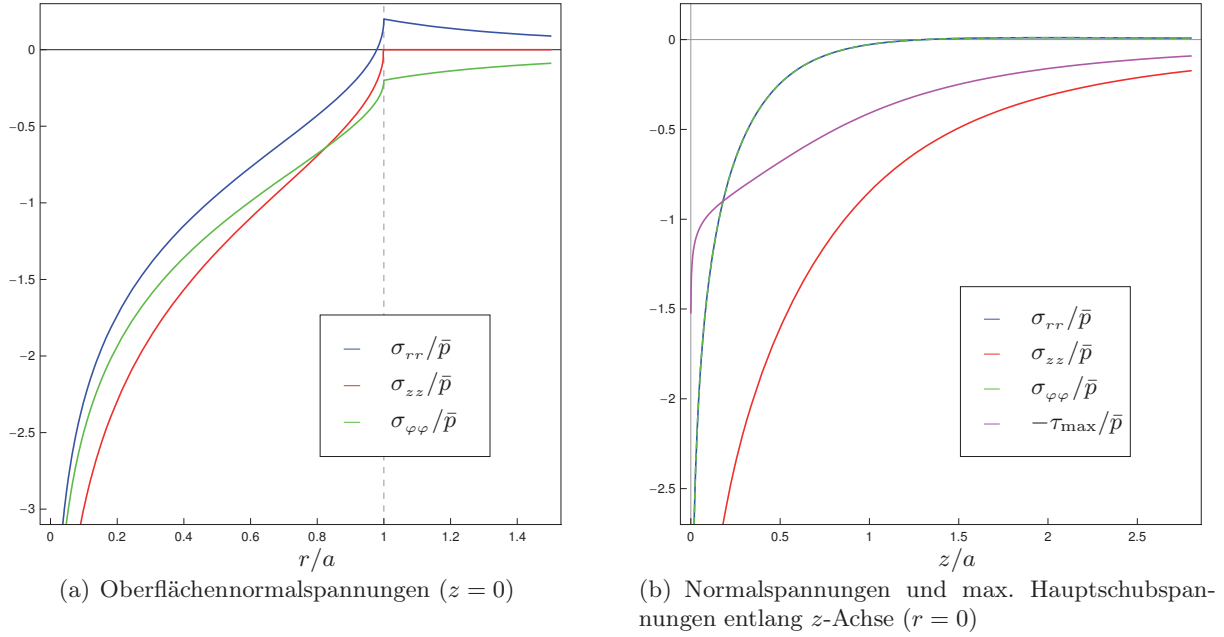


Abbildung 2.17: Linien gleicher (maximaler) Hauptschubspannungen $\tau_{\max} = \tau_I$ für den Kontakt mit einem kegelförmigen Indenter ($\nu = 0.3$).

³⁶Die maximalen Hauptschubspannungen streben gemäß $\lim_{z \rightarrow 0} \tau_I \sim \lim_{z \rightarrow 0} \ln \left[1 + \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right]$ gegen ∞ .



Abbildungung 2.18: Spannungsgößen in der Oberfläche ($z = 0$) und entlang der Hauptachse z ($r = 0$) für den Halbraumkontakt mit einem kegelförmigen Indenter bei $\nu = 0.3$, erzeugt mit Hilfe des reduzierten Ersatzmodells!

Kontakt mit flachen zylindrischen Stempel

Seine Geometrie ist aufgrund der Unstetigkeit in den Verschiebungsableitungen am Rand des Kontaktes $r = a$ mit Vorsicht zu behandeln, weil in den Bestimmungsgleichungen für die globalen Größen Normalkraft P und Eindringtiefe δ (2.40), (2.39) die BOUSSINESQsche Forderung nicht erfüllt ist, mathematisch heißt das $\chi(1) \neq 0$. Ungeachtet dieser Bedingung sind dennoch einige Zusammenhänge aus dem Grenzwert $n \rightarrow \infty$ erhältlich, wie beispielsweise die Beziehung

$$P = 2\tilde{E}a\delta. \quad (2.113)$$

An dieser Stelle sei ein kleiner Einschub erlaubt, welcher u.a. ein späteres Anwendungsgebiet der hier entwickelten Reduktionsmethode vorstellt. Differenziation von (2.113) nach δ ($\delta \neq f(a)$) führt auf die Kontaktsteifigkeit

$$k := \frac{dP}{d\delta} = 2\tilde{E}a, \quad (2.114)$$

welche von fundamentaler Bedeutung für die Werkstoffwissenschaften ist, da sie noch heute zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls (bzw. der Kontaktfläche) bei *Härteprüfverfahren* (auf verschiedenen Skalen) genutzt wird. Die Allgemeingültigkeit von Gleichung (2.114) für *jede beliebige axial-symmetrische Indenterform* wurde in [88] bewiesen.³⁷ Die meistgenutzten VICKERS- und BERKOVICH-Indenter sind zwar nicht axialsymmetrisch, der Fehler bei Zugrundelegung obiger Formel ist jedoch gering [59]. Zweifelsohne finden Härteprüfverfahren im *elastoplastischen* Regime statt, während die Kontaktsteifigkeit der Elastizität angehört. Deren Anwendung stellt insofern keinen Widerspruch dar, als dass die *Entlastung* als *rein elastisch* angenommen wird. Bei bestimmten Materialien hat sich experimentell gezeigt, dass die Kontaktfläche in der Anfangsphase der Entlastung konstant bleibt (wie bei einem flachen zylindrischen Stempel); die damit verbundene konstante Initial-Steifigkeit

³⁷Selbstverständlich ist die Kontaktsteifigkeit dann keine Konstante, da der Kontaktradius a von der Eindringtiefe δ abhängt.

läßt sich sehr einfach aus einem gemessenen P - δ -Diagramm ablesen und führt somit – bei bekannter Kontaktfläche – direkt auf den effektiven E -Modul. Ein standardisiertes Verfahren zur Auswertung solcher Kraft-Eindringtiefe-Kurven für unterschiedliches nicht-lineares Stoffverhalten (gemeint ist die Entlastung) geht auf OLIVER und PHARR [76] zurück.

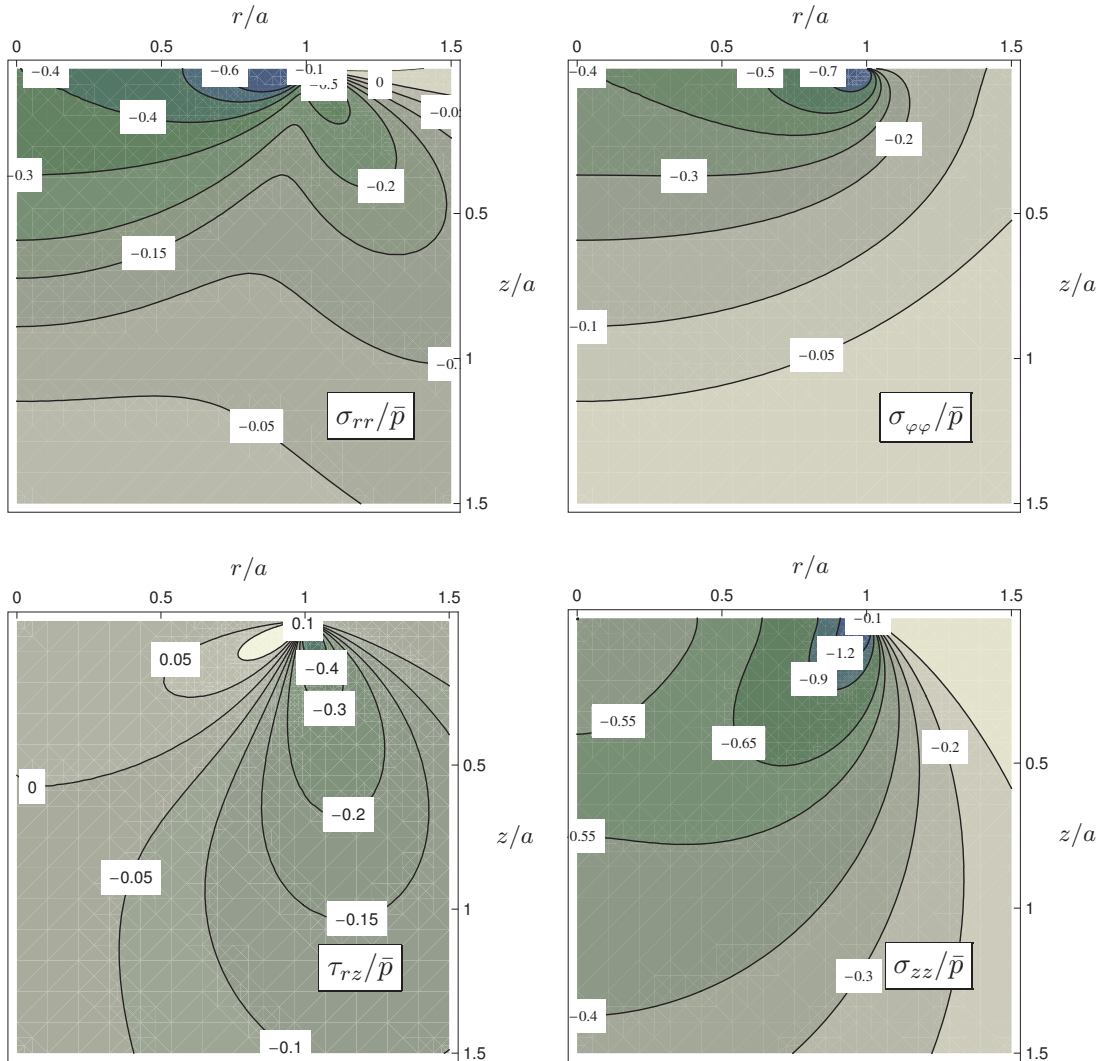


Abbildung 2.19: Spannungsfelder im Halbraum für den Kontakt mit einem flachen zylindrischen Stempel ($\nu = 0.3$); Lösungen wurden mit dem Reduktionsmodell generiert.

Widmen wir uns nun wieder dem Kontakt zwischen einem flachen zylindrischen Indenter und dem Halbraum. Abermals möchte ich die analytischen Lösungen aufgrund ihrer Unhandlichkeit schuldig bleiben und dazu auf [56] verweisen; jene dienen dem Zwecke einer Fehlerangabe für die Resultate aus dem Reduktionsprozess. Die der Halbscheibe aufzuprägende, normierte Druckverteilung kann wie eingangs diskutiert aus dem Grenzwert von (2.105) berechnet werden, wobei ein x -abhängiger Anteil zuvor ausgeschlossen wird

$$\frac{p^p(x)}{\bar{p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2} \quad \text{für } 0 \leq |x| \leq a; \quad (2.115)$$

nachvollziehbar, denn eine konstante Verschiebung im Real- und nach Geometrie-Transformation auch im Ersatzsystem hat konstante Federspannungen zur Folge, die ja gerade die Randlast für das

(fiktive) zweidimensionale Kontinuum ausmachen!³⁸ Nach Anwendung der entsprechenden ABEL-Transformationen (siehe Korrespondenztabelle) auf das zweidimensionale dynamische Feld ergeben sich die dreidimensionalen Spannungsgrößen nach Abbildung 2.19. Offensichtlich regiert die Unstetigkeit am Kontaktflächenrand ($r = a, z = 0$) den Verlauf der Isolinien und führt zu theoretisch unendlich großen Spannungswerten. Unterschiede zu den analytischen Lösungen konnte ich zunächst nur im oberflächennahen Bereich feststellen, verursacht durch die numerische Integration im Rahmen der ABEL-Transformation. Zum Teil habe ich daher die Integration nicht bis zum Rand ausführen lassen, sondern nur bis zu einem kritischen Wert $z_{\text{kr}}/a = 0.000001 - 0.001$ – je nach Einfluß der Störung. Einen damit verbundenen Fehler kann man im Verlauf der Radialspannung innerhalb der Oberfläche in Abbildung 2.20 entdecken. Zum Vergleich ist die analytische Kurve schwarz strichliert angedeutet und jene zusammen mit den beiden anderen Normalspannungen zeigen außerhalb des Kontaktgebietes erneut exakt das gleiche Verhalten wie bei den vorab behandelten Geometrien.

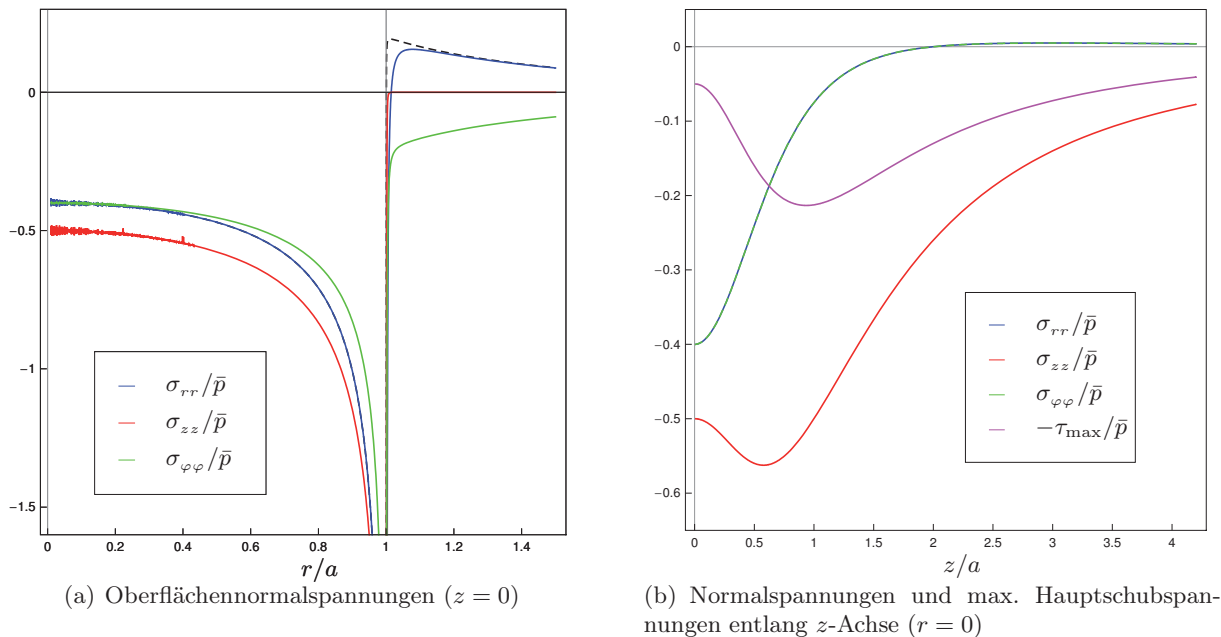


Abbildung 2.20: Spannungsrößen in (bzw. knapp unterhalb) der Oberfläche ($z = 0$) und entlang der Hauptachse z ($r = 0$) für den Halbraumkontakt mit einem flachen zylindrischen Stempel bei $\nu = 0.3$, erzeugt mit Hilfe des reduzierten Ersatzmodells!

Eine genauere Untersuchung bestätigt die Annahme, dass sämtliche Spannungen und die Radialverschiebung innerhalb der Oberfläche außerhalb des Kontaktgebietes für verschiedenartige axial-symmetrische Geometrien identisch den Fundamentallösungen (bei $z = 0$) von BOUSSINESQ [13] sind – die senkrechte Einzelkraft auf dem Halbraum

$$u_r(r, z = 0) = -\frac{1 - 2\nu}{4\pi G} \frac{P}{r} \quad \text{für } r > a \quad (2.116)$$

$$\sigma_{rr}(r, z = 0) = \frac{1 - 2\nu}{2\pi} \frac{P}{r^2} \quad \text{für } r > a \quad (2.117)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, z = 0) = -\frac{1 - 2\nu}{2\pi} \frac{P}{r^2} \quad \text{für } r > a. \quad (2.118)$$

³⁸Die konstante Randlast wurde bereits im Rahmen der WEBER-Transformation ermittelt (siehe Abbildung 2.11).

Für alle anderen Bereiche gilt dies nicht, sieht man mal davon ab, dass sich in genügend großem Abstand r vom Beanspruchungsgebiet alle Lösungen denen der Einzelkraft nach dem *Prinzip von SAINT-VENANT* annähern. In Abbildung 2.21 aufgeführt sind außerdem zwei verschiedene Hauptschubspannungen τ_I und τ_{II} , die sich sehr ähnlich sehen. Keiner der beiden Verläufe kann jedoch uneingeschränkt als Konturplot für die maximalen Hauptschubspannungen herangezogen werden, auch wenn zunächst τ_I danach greift. Die von den Ringspannungen abhängige Hauptschubspannung τ_{II} stellt in lokalen Bereichen nahe der Oberfläche zum Teil die größeren Werte, was sich bereits anhand der Hauptspannungsdifferenzen in den Verläufen der Oberflächenspannungen vermuten läßt (Abstand zwischen blau und roter sowie grün und roter Kurve in Abbildung 2.20 a).³⁹ Entlang der z -Achse sind solche dann wieder gleich, da Radial- als auch Umfangsspannungen identisch sind (Abbildung 2.20 b). Plastische Verformung tritt aufgrund theoretisch unendlich großer maximaler Hauptschubspannungen an den Ecken des flachen zylindrischen Stempels stets auf.

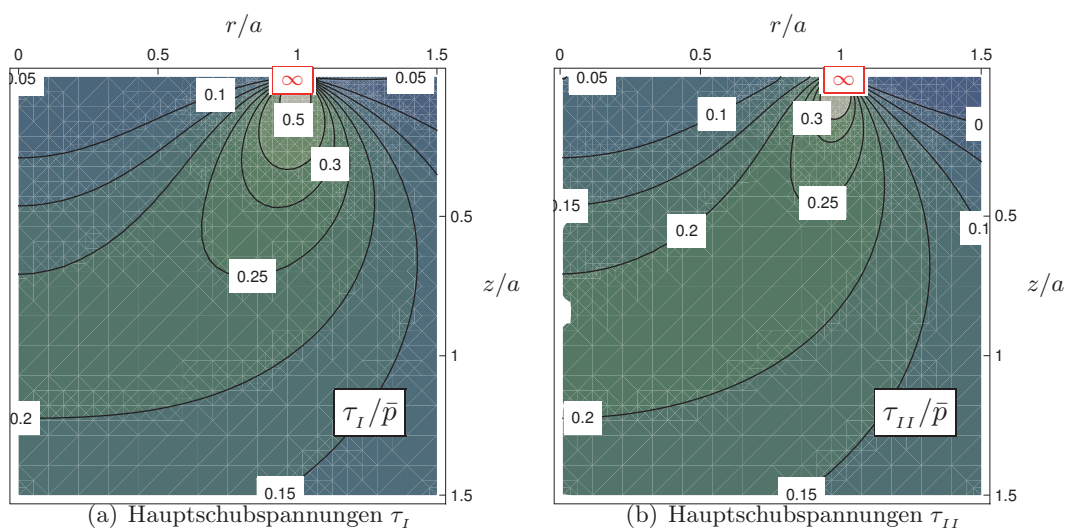


Abbildung 2.21: Linien gleicher (maximaler) Hauptschubspannungen τ_{\max} für den Kontakt mit einem flachen zylindrischen Stempel ($\nu = 0.3$).

Einfluß der Geometrie auf die Position des Fließbeginns

In welcher Art die Indenterform den Ort der erstmaligen Plastizierung verschiebt, wurde anhand der aus kontaktmechanischer Sicht bedeutensten Geometrien erläutert. Während sich das unendliche Maximum der Hauptschubspannungen beim kegelförmigen Indenter ($n = 1$) direkt an der Spitze befindet, wandert es beim HERTZschen Kontakt ($n = 2$) entlang der Symmetrieachse und bleibt finit. Für den flachen zylindrischen Stempel ($n \rightarrow \infty$) liegt es wiederum an der Oberfläche, genau genommen an seinen Ecken und strebt gegen unendlich. Was zwischen den beiden letztgenannten Formen passiert, darüber soll die abschließende Grafik Aufschluß geben. Offensichtlich verlagert sich die Position des Fließbeginns mit steigendem n von der z -Achse zum Kontaktflächenrand.⁴⁰

³⁹Die Gestaltänderungsenergiehypothese von VON-MISES würde eine solche Problematik ausschalten.

⁴⁰Es sei angemerkt, dass aufgrund der unterschiedlich großen Wertebereiche das Farbkennfeld verzerrt und die Konturlinien individuell gewählt wurden, was einen objektiven Vergleich der "Stärke" der Hauptschubspannungen erschwert.

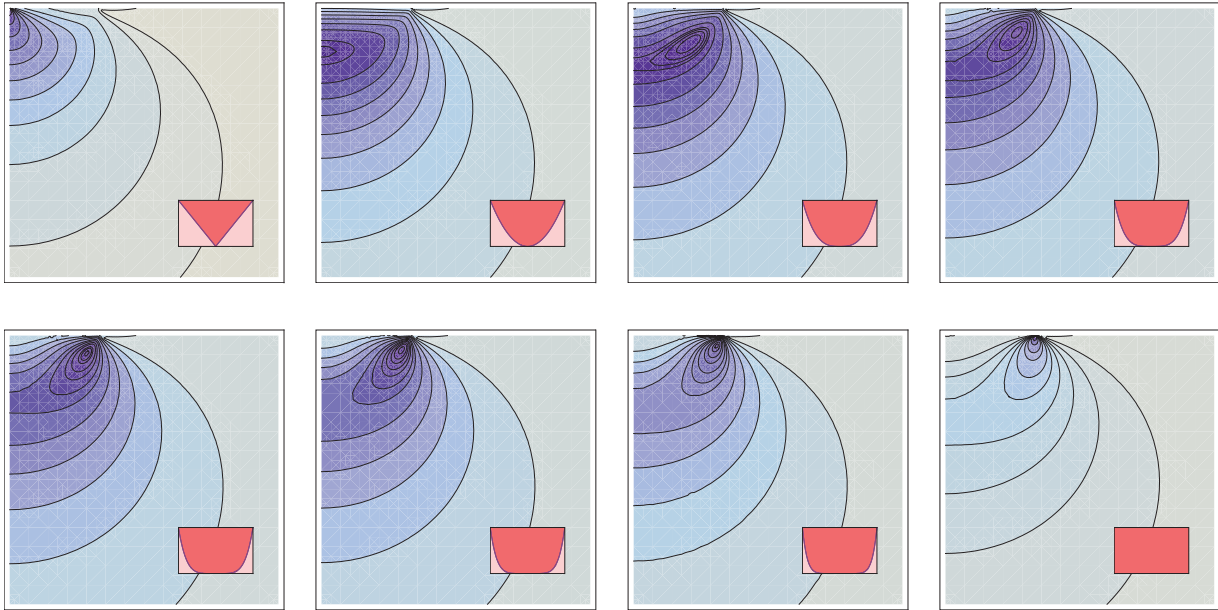


Abbildung 2.22: Einfluß der Indenterform auf den Ort maximaler Hauptschubspannungen; Einzel- diagramme wurden mit der *Reduktionsmethodik* erzeugt!

2.5 Zusammenfassung zu einem vollständigen Algorithmus

Die einzelnen neuen Erkenntnisse der vorausgehenden Abschnitte sollen zuletzt zu einem Algorithmus verbunden werden, welcher die Möglichkeit bietet, Kontaktzustände vollständig mit Hilfe dimensionsreduzierender Elemente abzubilden. Ihr Vorteil gegenüber optimierten, herrkömmlichen Verfahren liegt in der weitaus geringeren Rechenzeit, da sie mit erheblich weniger Freiheitsgraden auskommen, ohne an Genauigkeit einzubüßen. Sieht man von numerischen Fehlerquellen ab, kommen sogar exakt die analytischen Lösungen heraus! Sicherlich existieren viele Programme, die eine Verringerung der Anzahl unabhängiger Bewegungsmöglichkeiten beinhalten, keines bedient sich dabei aber der in dieser Arbeit vorgestellten *Dimensionsreduktion*. Nun kann man derart dagegen argumentieren, als dass doch eine ganze Menge von ebenen Systemen zur Beschreibung von dreidimensionalen Kontakten auf dem Markt existieren – womöglich bereits mehr als jene, die auf einer seriösen Diskretisierung des materiellen Raumes basieren. Der korrekten Wiedergabe aller Eigenschaften eines Punktkontaktes (globale und lokale) können diese aber allesamt nicht genügen. Selbstverständlich lassen sich reale Reibkontakte ohnehin kaum analytisch beleuchten, weil eine Vielzahl von Aspekten verschiedener Gestalt den Kontakt ausmachen. Daher gewinnen statistische Kennwerte an Bedeutung, um deren näherungsweise Einhaltung es primär den meisten Programmpaketen geht. Nachfolgend liste ich schrittweise den angesprochenen Algorithmus für die *vollständig korrekte Abbildung eines punktförmigen Einzelkontaktes* auf. Die Formfunktion des Indenters f als Polynom n -ten Grades sowie den effektiven elastischen Modul \tilde{E} setze ich als bekannt voraus.

1. Zunächst ist die Geometrie des *starren Ersatzindenters* zu bilden, indem die einzelnen Glieder der gegebenen Formfunktion einfach mit dem jeweiligen Formfaktor $\varkappa(n)$ gemäß (2.51) zu multiplizieren sind.
2. Es ist eine eindimensionale diskrete Federbettung (Abstand der Federn: $\Delta x \ll a$) zu generieren, deren Elemente die Steifigkeit $k := \tilde{E}\Delta x$ besitzen.
3. Der starre Ersatzindenter wird in die 1D-Schicht gedrückt; die Eindringtiefe δ als Verschiebung der Indenterspitze kann dabei sehr einfach abgelesen werden, weil unbelastete Gebiete keine Verformung erleiden (Lokale Wirkung!). Die Normalkraft P geht aus der Summe aller Federkräfte hervor.
Sowohl die $P(\delta)$ - als auch $\delta(a)$ -Beziehung werden identisch mit denen des dreidimensionalen Originals sein!
4. Die Federkräfte (-spannungen) werden mit dem Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ modifiziert. Durch ABEL-Rücktransformation jener Größen in Form von Gleichung (2.103) kann auf die Normalspannungsverteilung im Kontaktgebiet geschlossen werden, falls erwünscht.
Alternative: Verschiebungsfunktion im Ersatzmodell über Summe von Wurzelgliedern $(\sqrt{1-x^2})^n$ formulieren und anschließend durch gewichtete Wurzelausdrücke dividieren (Theorie und Beispielanwendung siehe Anhang C.2).
5. Zur Bestimmung der Feldgrößen im Inneren wird zunächst ein zweidimensionales diskretes System erzeugt – beispielsweise ein isotropes ebenes Gittermodell – und mit den modifizierten Federkräften (-spannungen) beansprucht.
6. Die quasi-fiktiven Felder im Inneren des ebenen Ersatzsystems werden abgegriffen und anschließend entsprechend den Einträgen in den Korrespondenztabelle 2.1 und 2.2 einer Linienintegration unterworfen. Die sich daraus ergebenden Größen stimmen bis auf Fehler aus der Diskretisierung resultierend mit den gesuchten Spannungen und Verschiebungen im axialsymmetrisch belasteten Halbraum überein!

Ergänzende Bemerkung – Ausdehnung auf beliebig positiv reelle Exponenten n

Für die Indentergeometrie wurde bislang stets ein Polynom n -ten Grades angesetzt, bei anderen Formen auf die Möglichkeit hingewiesen, diese über ihre TAYLOR-Reihe annähern zu können. Der Definitionsbereich des Formfaktors \varkappa_n kann jedoch problemlos auf *positiv-reelle* n erweitert werden und sowohl die makroskopischen Relationen nach (2.42), (2.43) als auch der fundamentale Beweis (2.48) sind gültig! Ohne Einschränkung ist damit der obengenannte Algorithmus auch für solche Exponenten anwendbar. Im Hinblick auf die Erweiterung der Reduktionsmethode für den adhäsiven Kontakt (Kapitel 3) spielt diese Erkenntnis eine zentrale Rolle, da gerade für Potenzen $0 < n \leq 2$ das Verhalten stark variiert. Dass sich bereits im Fall ohne Adhäsion markante Ergebnisse einstellen, möchte ich am Beispiel von $n = 3/2$ verdeutlichen. Die Zusammenhänge globaler Größen lauten

$$\delta(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} c_{3/2} a^{3/2} \approx 1.8 c_{3/2} a^{3/2}$$

$$P(a) = \tilde{E} \sqrt{\pi} \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} c_{3/2} a^{5/2} \approx 2.16 \tilde{E} c_{3/2} a^{5/2},$$

den Verlauf der Normalspannungen innerhalb der Oberfläche zeigt Abbildung 2.23.

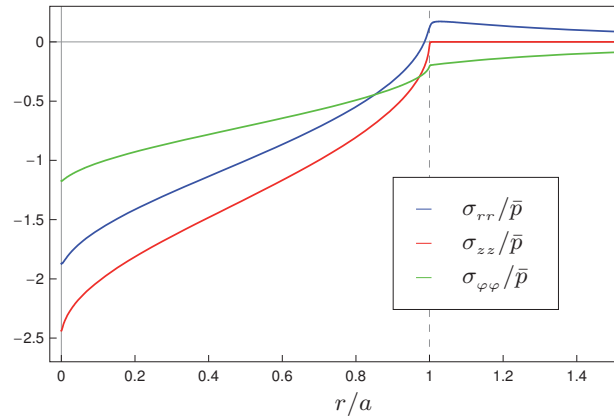


Abbildung 2.23: Spannungsrößen in der Oberfläche ($z = 0$) für den Halbraumkontakt mit einem Indenter gekennzeichnet durch $n = 3/2$ bei $\nu = 0.3$, erzeugt mit Hilfe des Reduktionsalgorithmus!

Das Maximum der Druckverteilung liegt bei $r = 0$, ist endlich und bildet zusammen mit dem Krümmungsverhalten eine interessante Kombination, welche für $n > 2$ nicht mehr vorkommt. Die Richtigkeit des durch die "Reduktion" erhaltenen Resultates bestätigt [25]; in diesem Artikel wird zudem die Singularität am Kontakttrand für durch scharfe Kanten begrenzte axialsymmetrische Indenter untersucht (Vollständiger Kontakt!).

Kapitel 3

Erweiterung der Reduktionsmethode zur Abbildung des adhäsiven Kontaktes

Im vorausgegangenen Kapitel wurde das Kontaktproblem reibungsfreier axialsymmetrischer Indenter beliebigen Profils mit dem elastischen Halbraum abgebildet. Selbstverständlich existieren bereits zahlreiche stark vereinfachte Modelle, die solches zur Aufgabe besitzen. Das hier vorgestellte Modell auf Basis der *Reduktionsmethode* (*Korrespondenzprinzip mit inbegriffen*) unterscheidet sich jedoch wesentlich von diesen, da es die Charakterisierung des *vollständigen Kontaktproblems* erlaubt: es liefert sowohl die globalen Größen wie Eindringtiefe, Kontaktradius und Kontaktkraft als auch die Spannungen und Verschiebungen eines jeden Punktes an der Oberfläche und im Innern des elastischen Körpers. Einzigartig ist dabei die Tatsache, dass *alle Ergebnisse exakt* mit denen des Originalproblems übereinstimmen – die notwendige analytische Beweisführung wurde erbracht!

Nun stellt sich die Frage, ob das Reduktionsverfahren ebensogut einer genauen Abbildung des *adhäsiven Kontaktes* genügt. Die Antwort scheint insofern schwierig, da verschiedene Adhäsionstheorien bestehen und welche davon ist nun exakt?¹ In dieser Arbeit soll die Theorie von JOHNSON, KENDALL und ROBERTS [55] federführend sein, wobei deren von MAUGIS [70, 67] aufgezeigte Analogie zur Rissausbreitung in der linear elastischen Bruchmechanik ausgenutzt wird.

3.1 Das vollständige Gleichungssystem nach SNEDDON – Einfluß der Starrkörpertranslation

Für einen adhäsiven Kontakt darf nun nicht mehr von der BOUSSINESQ-Annahme Gebrauch gemacht werden, nach der die Oberflächen der Kontaktpartner am Rande des Kontaktes tangential auseinanderlaufen und damit dort keine Normalspannungen auftreten. Aus diesem Grunde wird der zusätzliche Starrkörpertranslationsanteil $\chi(1)$ in den Gleichungen von SNEDDON [107] nicht verschwinden; jener Anteil wurde in einigen wichtigen, teilweise sogar beweisführenden Formeln des letzten Kapitels – obwohl gleich Null – mitgeführt, um zügige Aussagen hinsichtlich der Übertragbarkeit auf den adhäsiven Fall treffen zu können. Ich fasse die Basis nochmal zusammen. Die Bestimmungsgleichungen für Eindringtiefe und Normalkraft waren

¹Zum Gültigkeitsbereich der verschiedenen Adhäsionstheorien in Abhängigkeit der Längenskala, Elastizität und Adhäsionsenergie siehe [54]

$$\delta = \int_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{\pi}{2} \chi(1) \quad (3.1)$$

$$P = 2\tilde{E}a \int_0^1 \left[\delta - t \int_0^t \frac{f'(x)}{\sqrt{t^2-x^2}} dx \right] dt, \quad (3.2)$$

die Normalspannungen und -verschiebungen an der Oberfläche werden hingegen aus

$$\delta - f(\tilde{r}) = \int_0^{\tilde{r}} \frac{\chi(t)}{\sqrt{\tilde{r}^2-t^2}} dt \quad \text{für} \quad \tilde{r} < 1 \quad (3.3)$$

$$u_z(\tilde{r}, 0) = \int_0^1 \frac{\chi(t)}{\sqrt{\tilde{r}^2-t^2}} dt \quad \text{für} \quad \tilde{r} > 1 \quad (3.4)$$

$$\sigma_{zz}(\tilde{r}, 0) = \frac{\tilde{E}}{2a} \left[\int_{\tilde{r}}^1 \frac{\dot{\chi}(t)}{\sqrt{t^2-\tilde{r}^2}} dt - \frac{\chi(1)}{\sqrt{1-\tilde{r}^2}} \right] \quad \text{für} \quad \tilde{r} < 1 \quad (3.5)$$

ermittelt.

3.1.1 1D-Reduktion des nicht-adhäsiven Halbraumkontaktes mit einem flachen zylindrischen Stempel

Das Korrespondenzprinzip zur Bestimmung der Feldgrößen im Inneren ist ohne weiteres auf Kontakte übertragbar, bei welchen die Oberflächen nicht tangential auseinanderlaufen, was am Beispiel des flachen zylindrischen Stempels gezeigt wurde. Abgesehen von einem Hinweis in Abschnitt 2.2.1 fehlt aber für diesen Fall noch der Beweis, dass auch die Normalkraft P aus der Summe der Federkräfte und damit dem 1D-Federmodell hervorgeht. Dazu berücksichtigen wir in den Gleichungen (3.1), (3.2) die Beziehung $f'(x) = 0$ und erhalten

$$\delta = \frac{\pi}{2} \chi(1) = \text{const.} \quad (3.6)$$

$$P = 2\tilde{E}a\delta = \tilde{E} \int_{-a}^a \delta d\tilde{x} = \underbrace{\tilde{E}\Delta\tilde{x}}_{=:k} \sum_{i=-j}^j i\delta, \quad (3.7)$$

worin $j = a/\Delta\tilde{x}$ die Anzahl der Federn pro Kontakthalbbreite a bedeutet und k die Federsteifigkeit angibt. Aufgrund der Gleichheit aller Federverschiebungen $\Delta\ell_i = \delta$ ist im Gegensatz zu anderen Geometrien an dieser Stelle nicht einmal auf eine möglichst feine Diskretisierung $\Delta\tilde{x} \ll a$ zu achten. Der integrale Zusammenhang unterstreicht zudem, dass keinerlei Geometriemodifikation erforderlich ist.

3.1.2 Spannungen und Verschiebungen in der Nähe des Kontaktrandes – Analogie zum Rissspitzenfeld

In [7, 69] wurden die Normalspannungen und Verschiebungen in der unmittelbaren Umgebung $r \approx a$, $\varepsilon \ll 1$ des Kontaktrandes mit Hilfe obiger Formeln genauer untersucht, mit dem folgenden Ergebnis

$$\sigma_{zz}(\tilde{r} = a(1 - \varepsilon), 0) \approx -\frac{\tilde{E} \chi(1)}{2a \sqrt{2\varepsilon}} \quad (3.8)$$

$$\Delta u_z(\tilde{r} = a(1 + \varepsilon), 0) \approx -\chi(1) \sqrt{2\varepsilon}, \quad (3.9)$$

worin $\Delta u_z(r, 0) := f(r) - \delta + u_z(r, 0)$ die Differenz der Normalverschiebung zwischen Indenter- und Halbraumoberfläche außerhalb des Kontaktgebietes widerspiegelt. Diese Beziehungen entsprechen aber gerade den Nahfeldern in der Umgebung eines Risses (Rissspitzenfelder), deren Stärke einzig und allein über den Spannungsintensitätsfaktor K ausgedrückt wird (siehe Anhang D.2). Den freien Rand des adhäsiven Kontaktes können wir demnach als Riss mit Öffnung im Modus I ansehen, welcher sich je nach Änderung der Belastung nach innen bzw. außen ausbreitet. Der Öffnungsmodus I gehört dabei zu einem Riss, der sich unter Wirkung einer Zugbeanspruchung senkrecht zur Rissebene öffnet. Da bei uns eine dreidimensionale (axialsymmetrische) Geometrie vorliegt, gelten die asymptotischen Lösungen allerdings nur lokal an jedem Punkt der Rissfront. Der Spannungsintensitätsfaktor K_I kann durch einen Vergleich von (3.8), (3.9) mit (D.14), (D.15) bzw. unmittelbar aus seiner Definition (D.16) über den Starrkörperfreiheitsgrad ausgedrückt werden

$$K_I(a) = -\frac{\sqrt{\pi} \tilde{E}}{2\sqrt{a}} \chi(1). \quad (3.10)$$

3.1.3 Verallgemeinerung der JKR-Theorie für beliebig geformte axialsymmetrische Oberflächenprofile

Die Äquivalenz von energetischem Bruchkriterium und K -Konzept (D.18) stellt eine Verbindung zwischen *elastischer Energiefreisetzungsrate* \tilde{G} und K -Faktor bzw. unter Berücksichtigung von (3.10) zwischen \tilde{G} und der noch unbekanntem Translation $\chi(1)$ her

$$\tilde{G} = \frac{\pi \tilde{E}}{8a} \chi^2(1). \quad (3.11)$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den (stationären) Riss (D.5) bzw. (D.6) ermöglicht letzten Endes deren Berechnung²

$$\chi(1) = -\sqrt{\frac{8a\tilde{\gamma}}{\pi \tilde{E}}}. \quad (3.12)$$

Setzen wir diesen Wert nun wiederum in die Basisausdrücke ein, ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für die Eindringtiefe, Normalkraft und Oberflächenspannungen beim adhäsiven Kontakt

²Die Zugspannungen am Kontaktrand (3.8) diktieren das negative Vorzeichen von $\chi(1)$!

$$\delta = \underbrace{\int_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=\delta_{\text{n.a.}}} - \sqrt{\frac{2a\pi\bar{\gamma}}{\tilde{E}}} \quad (3.13)$$

$$P = 2\tilde{E}a \underbrace{\int_0^1 \left[\delta_{\text{n.a.}} - t \int_0^t \frac{f'(x)}{\sqrt{t^2-x^2}} dx \right] dt}_{=P_{\text{n.a.}}} - \sqrt{8\pi\tilde{E}a^3\bar{\gamma}} \quad (3.14)$$

$$\sigma_{zz}(\tilde{r}, 0) = \underbrace{\frac{\tilde{E}}{2a} \int_{\tilde{r}}^1 \frac{\dot{\chi}(t)}{\sqrt{t^2-\tilde{r}^2}} dt}_{=\sigma_{zz}^{\text{n.a.}}} + \frac{P_{\text{n.a.}} - P}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{r}^2}}. \quad (3.15)$$

Die Abkürzung “n.a.” steht für *nicht-adhäsiv*. $P_{\text{n.a.}}$ meint beispielsweise die scheinbare Kraft, welche im nicht-adhäsiven Fall zu dem gleichen Kontaktradius a führen würde, wie er sich im adhäsiven Fall unter der Last P einstellt. Analoges gilt für $\delta_{\text{n.a.}}$; der Spannungsanteil $\sigma_{zz}^{\text{n.a.}}$ resultiert allein aus der scheinbaren Kraft $P_{\text{n.a.}}$. Anhand dieser Formeln kann man sehr schön die Idee der JKR-Theorie [55] nachvollziehen. Zunächst wird der Halbraum mit der (scheinbaren) Kraft $P_{\text{n.a.}}$ beansprucht, welche zu einem bestimmten (dem späteren adhäsiven) Kontaktradius führt; dabei wirke *keine Oberflächenenergie!* Für einen Kugelkontakt bedeutet dies, dass die Belastung nach HERTZ geschieht. Anschließend erfolgt eine Entlastung bis auf P bei konstant gehaltener Kontaktfläche, wobei die Oberflächenenergie sukzessive bis auf ihren Wert $\bar{\gamma}$ erhöht wird. Die Entlastung gleicht somit der eines flachen zylindrischen Stempels bis der Gleichgewichtspunkt für den adhäsiven Kontakt erreicht ist.

Eine Gegenüberstellung der Normalspannungsverteilung innerhalb des Kontaktgebietes $p(r)$ sowie der Oberflächennormalverschiebung $\bar{u}_z(r)$ für den nicht-adhäsiven und adhäsiven Kugelkontakt (JKR) verdeutlicht Abbildung 3.1. Linkerhand sind die Randgrößen für den HERTZschen Kontakt bei Beanspruchung durch die Kraft $P_{\text{n.a.}}$ aufgezeigt, welche zu dem gleichen Kontaktradius führt, wie im adhäsiven Fall. Als Kontaktradius wurde jener kritische gewählt, bei welchem sich die maximale Abzugskraft einstellt. In diesem Sonderfall sind die Normalkräfte gerade betragsmäßig gleich groß. Ich möchte darauf hinweisen, dass beide Kontaktzustände *präzise* abgebildet sind. Beispielsweise kann hieraus der bekannte Zusammenhang zwischen den Eindrücktiefen $\delta(a_c) = -\frac{1}{3}\delta_{\text{n.a.}}(a_c)$ abgelesen werden. Während im nicht-adhäsiven Kontakt die Oberflächen tangential auseinanderlaufen, liegt im kritischen Zustand der adhären Kugel ein vertikaler Anschluß des elastischen Halbraums an die starre Indenterform vor; am Kontaktrand bestehen daher theoretisch unendlich große Zugspannungen. Im Inneren verbleibt ein druckbeaufschlagtes Gebiet ($r_D \leq \frac{1}{\sqrt{3}}a_c$). Die Normalspannungen wurden auf den mittleren Druck $\bar{p}_{\text{n.a.}} := P_{\text{n.a.}}/A_c$, die Verschiebungen auf die Eindrücktiefe $\delta_{\text{n.a.}} := a_c^2/R$ normiert; beides sind Größen, welche sich im Kontakt ohne Adhäsion ergeben.

Im weiteren wird nun die JKR-Theorie auf beliebig geformte axialsymmetrische Indenter verallgemeinert. Der Einfachheit halber soll die Gestalt des Stempels lediglich aus einem eingliedrigen Ansatz hervorgehen

$$f_n(r) := c_n r^n \quad \forall n \in \mathbb{R}^+, \quad (3.16)$$

wie er bereits des öfteren in Kapitel 2 genutzt wurde. Dies hat den Vorteil, dass die Untersuchung der Grenzstabilität und damit die Berechnung sämtlicher kritischer Größen sehr einfach analytisch möglich ist.³

³Die Superposition von Formparabeln läßt hinsichtlich der kritischen Größen kaum allgemeingültige Lösungsausdrücke zu!

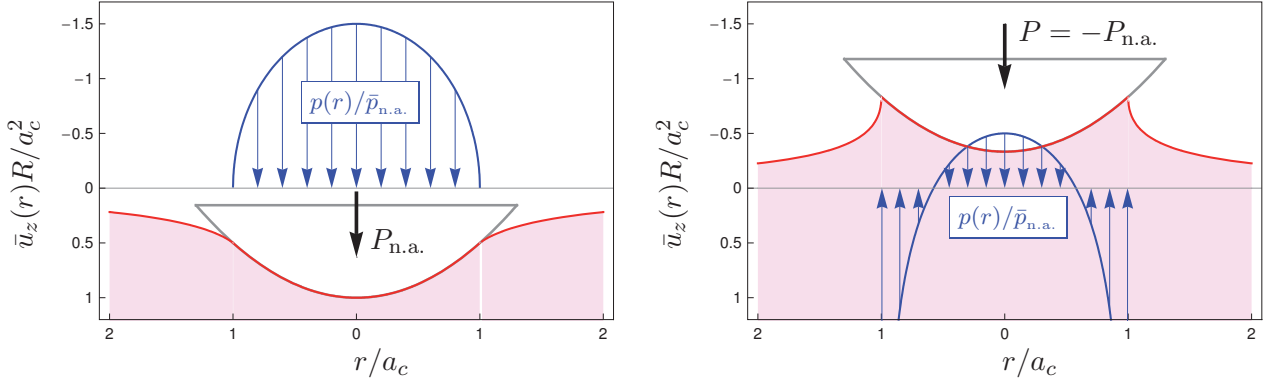


Abbildung 3.1: HERTZscher-Kugelkontakt beansprucht durch eine Normalkraft $P_{n.a.}$ (links), die zum gleichen Kontaktradius führt wie im adhäsiven Fall unter der Last P (rechts); genaugenommen ist sogar der kritische Zustand dargestellt, d.h. der Kontaktradius ist der kritische Radius a_c , bei welchem die Adhäsionskraft vorliegt; in diesem Zustand gilt $P = -P_{n.a.}$.

Aus Gleichung (3.14) folgt

$$P = 2\tilde{E} \frac{n}{n+1} \varkappa_n c_n a^{n+1} - \underbrace{\sqrt{8a^3 \tilde{E} \pi \bar{\gamma}}}_{\neq f(n)}, \quad (3.17)$$

wobei die scheinbare Kontaktkraft $P_{n.a.}$ zuvor gemäß (2.43) ersetzt wurde. Der zusätzliche adhäsive Anteil⁴ ist unabhängig vom Exponenten n und enthält das Produkt $\tilde{E}a^3$, welches für den parabolischen Fall $n = 2$ auch in $P_{n.a.}$ auftritt; diese Gemeinsamkeit indiziert bereits die allseitsbekannte Eigenschaft des Kugelkontaktes mit Adhäsion: *Für einen parabolischen Kontakt mit Adhäsion ist die maximale Abzugskraft unabhängig von den elastischen Eigenschaften!*

Eine zu (3.17) analoge Formulierung für Überlagerungen von Formfunktionen zur Gesamtgeometrie ist trivial. Das Auffinden des relativen Extremums von P – der Adhäsionskraft P_c – durch Auswertung der notwendigen Bedingung $\frac{dP}{da} \stackrel{!}{=} 0$ ist nach (D.8) bzw. (D.11) gleichbedeutend mit der Analyse des indifferenten Zustandes bei einem kraftgesteuerten Versuch. Nach kurzer Rechnung erhalten wir für die kritischen Größen

$$a_c = \left(\frac{9\pi\bar{\gamma}}{2n^2 \varkappa_n^2 c_n^2 \tilde{E}} \right)^{\frac{1}{2n-1}} \quad (3.18)$$

$$P_c = \frac{1-2n}{n+1} \left[\left(\frac{3}{2n\varkappa_n c_n} \right)^3 (2\pi\bar{\gamma})^{n+1} \tilde{E}^{n-2} \right]^{\frac{1}{2n-1}}. \quad (3.19)$$

In der festen Überzeugung, obige Ergebnisse müßten beinahe ebenso lange existieren, wie die JKR-Theorie selbst, überraschte mich ihre Aktualität. So beschäftigten sich vermutlich YAO und GAO erstmals im Jahre 2005 [126] mit dieser Formabhängigkeit der Adhäsionskraft.⁵ Mit zahlreichen anderen Wissenschaftlern teilen sie das Ziel, die hervorragenden Haftmechanismen von Geckos sowie besonderer Insekten zu studieren [111, 30, 125, 115, 101], um so die Entwicklung neuartiger Materialien und Vorrichtungen für industrielle Anwendungen voranzutreiben [26]. Für solche multiplen, trockenen Kontakte spielen neben der Form noch ganz andere Faktoren, wie beispielsweise

⁴Dieser entspricht gerade der Abzugskraft eines flachen zylindrischen Stempels!

⁵Das viel zitierte Paper von 2004 [31] enthält diese Ausdrücke noch nicht!

die Struktur, Längenskala und der Abziehungswinkel eine Rolle. Im Fokus meiner Arbeit liegt die exakte Abbildung des adhäsiven Einzelkontaktes beliebiger axialsymmetrischer Form durch ein reduziertes Abbild; die Adhäsion soll dabei der JKR-Theorie gehorchen. Dazu möchte ich obige Gleichungen erweitern und diskutieren. Zunächst übernehme ich die Definition der Formfaktoren über eine gemeinsame charakteristische Länge R aus [126]. Da die c_n bei mir verschiedene Maßeinheiten besitzen, ist so eine angenehmere Vergleichsmöglichkeit für den Einfluß der unterschiedlichen Geometrien auf die Adhäsionskraft geschaffen

$$f(r) := \frac{1}{nR^{n-1}}r^n \quad \Rightarrow \quad c_n \equiv \frac{1}{nR^{n-1}}; \quad (3.20)$$

für $n = 2$ gibt R den wohlbekanntem Krümmungsradius wieder. Für beispielhafte n veranschaulicht Abbildung 3.2 linkerhand die auf R bezogene Indenterform. Der Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gehört zum flachen zylindrischen Stempel. Rechterhand ist sehr schön zu erkennen, dass die maximale Abzugskraft für $n = 2$ unabhängig vom E -Modul ist – ein Ergebnis der klassischen JKR-Theorie. Während ein Zuwachs des E -Moduls den Betrag der Adhäsionskraft für $n > 2$ erhöht, ist der Effekt für $n < 2$ gegenläufig! Die Vergrößerung des Elastizitätsmoduls bei Indentierung des Halbraums mit einem konischen Indenter ($n = 1$) wäre beispielsweise schädlich, wenn man das Ziel verfolgt, die Haftkraft zu maximieren. Ein Anstieg der charakteristischen Länge R würde hingegen für alle $n > 1$ diesem Ziel genügen, bei $n < 1$ führt solcher wiederum zur Verringerung der maximalen Zugkraft.

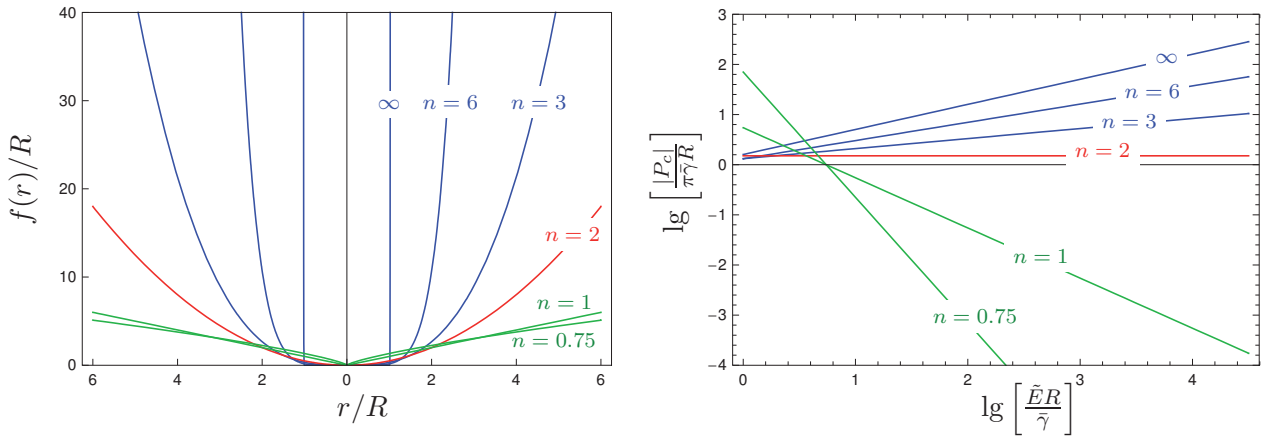


Abbildung 3.2: Auf die charakteristische Länge R bezogene Indentergeometrie (links) sowie Änderung der normierten maximalen Abzugskraft mit der Variablen $\frac{ER}{\gamma}$ für unterschiedliche Formexponenten n (rechts), analog [126].

Stabilitätsgrenzen bei Kraft- bzw. Wegvorgabe (“fixed-load” , “fixed-grips”)

An dieser Stelle möchte ich zum Einfluss des Exponenten n auf die Systemstabilität noch etwas beitragen: eine Analyse, die in der Literatur in dieser Form für beliebige n bis heute nicht zu finden ist! Ausgangspunkt der Untersuchungen sei die *Elastische Energiefreisetzungsrates* \tilde{G} nach (D.4), welche mittels der Gleichungen (3.13) und (3.14) über die “scheinbaren Größen im nicht-adhäsiven Fall” ausgedrückt werden, die zum jeweiligen *adhäsiven Kontaktradius* führen würden:

$$\tilde{G}(P, P_{n.a.}) = \frac{(P - P_{n.a.})^2}{k_P P_{n.a.}^{\frac{3}{n+1}}} \quad \text{mit} \quad k_P := 8\tilde{E}\pi \left(\frac{n+1}{2\tilde{E}n\kappa_n c_n} \right)^{\frac{3}{n+1}} > 0 \quad (3.21)$$

$$\tilde{G}(\delta, \delta_{n.a.}) = \frac{(\delta - \delta_{n.a.})^2}{k_\delta \delta_{n.a.}^{\frac{1}{n}}} \quad \text{mit} \quad k_\delta := \frac{2\pi}{\tilde{E}(\kappa_n c_n)^{\frac{1}{n}}} > 0. \quad (3.22)$$

Nach (D.7) aus Anhang D.1 muß für die Stabilität die Änderung der Energiefreisetzungsrate mit der Kontaktfläche bei konstanter Normalkraft bzw. Eindringtiefe größer Null sein. Für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial P_{\text{n.a.}}}{\partial a}$ und $\frac{\partial \delta_{\text{n.a.}}}{\partial a}$ gilt jenes ohnehin (siehe (2.42), (2.43)), so dass aus der Kettenregel die Stabilitätsforderungen

$$\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_{\text{n.a.}}} \right)_P > 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \delta_{\text{n.a.}}} \right)_\delta > 0 \quad (3.23)$$

hervorgehen. Ihre Auswertung liefert nachfolgende Ergebnisse:

1. Bei fester Normalkraft (“fixed load”):

$$\frac{P}{P_{\text{n.a.}}} > \frac{1-2n}{3} \quad \Longrightarrow \quad P_c = \frac{1-2n}{3} P_{\text{n.a.}} \quad (3.24)$$

2. Bei fester Eindringtiefe (“fixed grips”):

$$\frac{\delta}{\delta_{\text{n.a.}}} > 1-2n \quad \Longrightarrow \quad \delta_{c\delta} = (1-2n) \delta_{\text{n.a.}} \quad (3.25)$$

Darin wurde die kritische Eindringtiefe $\delta_{c\delta}$ bewußt mit einem Doppelindex versehen, da sie *nicht* zur maximalen Abzugskraft $|P_c|$ gehört. In beiden Fällen liegen nämlich unterschiedliche kritische Kontaktradien vor ($a_{c\delta}$, a_c). Die obigen Gleichungen verdeutlichen, dass es für $0 < n < 0.5$ niemals Zugkräfte ($P < 0$) geben wird, während für $n > 0.5$ solche auftreten können. Speziell die kritischen Größen P_c und $\delta_{c\delta}$ besitzen für letztere Einschränkung ein negatives Vorzeichen. Nehmen wir für das weitere $n > 0.5$ an, so wird sowohl der kritische Kontaktradius a_c nach (3.18) als auch die maximale Abzugskraft (siehe Abbildung 3.2) mit steigendem n zunehmen, jedenfalls für charakteristische Werte $\frac{\tilde{E}R}{\gamma} \gg 1$.

Es bleibt noch aus, die zu P_c zugehörige kritische Eindringtiefe $\delta_c := \delta(a_c)$ zu ermitteln. Bei vorgegebener Kraft ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.18) in (3.13)

$$\delta_c = \left(1 - \frac{2}{3}n \right) \underbrace{\varkappa_n c_n a_c^n}_{=\delta_{\text{n.a.}}(a_c)} \quad (3.26)$$

Beziehen wir nun die globalen Größen P und δ des adhäsiven Kontaktes auf die Beträge ihrer kritischen Größen, so erhalten wir zwei dimensionslose Gleichungen in Parametergestalt

$$\tilde{P} = \frac{1}{|1-2n|} \left[3\tilde{a}^{n+1} - 2(n+1)\tilde{a}^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.27)$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{|3-2n|} \left[3\tilde{a}^n - 2n\tilde{a}^{\frac{1}{2}} \right], \quad (3.28)$$

mit $\tilde{P} := P/|P_c|$, $\tilde{\delta} := \delta/|\delta_c|$ und $\tilde{a} = a/a_c$. Letztere beinhaltet insofern noch eine interessante Information, als dass für $n > 1.5$ die kritische Eindringtiefe δ_c negative Werte annimmt. Im Intervall $0.5 < n < 1.5$ ist sie hingegen positiv; das Vorzeichen der kritischen Kraft bleibt davon unbeeinflusst (weiterhin Zug). Jene Erscheinung ist in der folgenden Grafik zu erkennen, in welcher die normierte Kraft \tilde{P} über die normierte Eindringtiefe $\tilde{\delta}$ für die Beispiele eines konischen ($n = 1$) und parabolischen ($n = 2$) Indenters abgetragen wurde. Leider ist die Angabe einer analytischen Lösungsfunktion $\tilde{P}(\tilde{\delta})$ für beliebige n nicht möglich; bereits für $n = 2$ ergeben sich komplizierte

Ausdrücke, weshalb V.L. POPOV in [90] für die klassische JKR-Theorie eine ausgezeichnete, einfache (“fixed load”) Näherung angibt (rotstrichlierter Graph in Abbildung 3.3). Der blau gestrichelte Funktionsast ist der stabilen Lösung unter “fixed-grips”- Bedingung zuzuordnen. Die Tangente an seinem Endpunkt verläuft vertikal, während jene an der Stabilitätsgrenze (dem lokalen Minimum) unter “fixed-load”-Bedingung eine verschwindende Steigung besitzt.

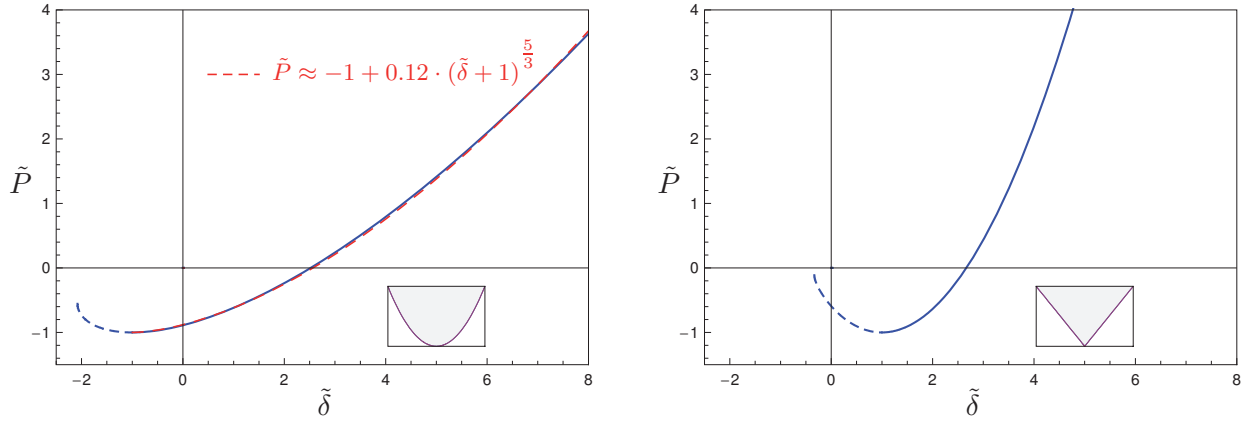


Abbildung 3.3: Abhängigkeit der normierten Kraft von der normierten Eindringtiefe für den adhäsiven Kontakt eines parabolischen (links) und konischen Indenters (rechts). Während die kritische Kraft in beiden Fällen negativ (Zugkraft) ist, besitzen die kritischen Eindringtiefen unterschiedliche Vorzeichen!

Abschließend sind die Zusammenhänge der kritischen Größen in Abhängigkeit des Formexponenten n tabellarisch aufgeführt:

Krit. Kontaktradius	$P(a)/P_{n.a.}(a)$	$\delta(a)/\delta_{n.a.}(a)$	$P(a)/P_c$	$\delta(a)/\delta_c$	a/a_c
a_c (fixed-load)	$\frac{1}{3}(1 - 2n)$	$\frac{1}{3}(3 - 2n)$	1	1	1
$a_{c\delta}$ (fixed-grips)	$-(1 + 2n)$	$1 - 2n$	$\left(\frac{1+2n}{2n-1}\right) 3^{\frac{3}{1-2n}}$	$\left(\frac{1-2n}{3-2n}\right) 3^{\frac{1}{1-2n}}$	$3^{\frac{2}{1-2n}}$

Tabelle 3.1: Kritische Größen für eine auf beliebige axialsymmetrische Formen verallgemeinerte JKR-Theorie u.a. im Vergleich zu den scheinbaren Größen im nicht-adhäsiven Fall; es wird zwischen “fixed-load” und “fixed-grips” unterschieden.

3.2 Eindimensionales Ersatzmodell für den adhäsiven Kontakt

Die genaue Abbildung des adhäsiven Kontaktes axialsymmetrischer Indenter mittels eines eindimensionalen Ersatzmodells verlangt lediglich eine geringfügige Erweiterung seines nicht-adhäsiven Pendantes. Dazu müssen wir uns nur an die eingangs des letzten Abschnitts erwähnte Grundidee von JOHNSON, KENDALL und ROBERTS erinnern: *Der Kontakt mit Adhäsion geht aus dem Kontakt ohne Adhäsion zuzüglich einer Starrkörpertranslation hervor!* Nach (3.13) und (3.14) gelten im Gleichgewicht

$$\delta = \delta_{\text{n.a.}} - \sqrt{\frac{2a\pi\tilde{\gamma}}{\tilde{E}}}$$

$$P = P_{\text{n.a.}} - \sqrt{8\pi\tilde{E}a^3\tilde{\gamma}}.$$

Die darin vorkommenden Größen mit dem Index “n.a.” waren jene, für die sich im Kontakt ohne Adhäsion der gleiche Kontaktradius a einstellen würde wie im Kontakt mit Adhäsion. Dass diese Terme exakt über ein eindimensionales Ersatzmodell modifizierter Geometrie abgebildet werden können, haben wir bereits bewiesen; der jeweilige zusätzliche Entlastungsanteil bei konstantem Kontaktradius a zeigt die Merkmale eines durch eine Zugkraft $P_{\text{n.a.}} - P$ beanspruchten flachen zylindrischen Stempels

$$P_{\text{n.a.}} - P = 2\tilde{E}a(\delta_{\text{n.a.}} - \delta). \quad (3.29)$$

Da auch dieser Zusammenhang gemäß Abschnitt 3.1.1 mit der Reduktionsmethode verträglich ist, können wir folgendes festhalten:

Die Reduktionsmethode läßt sich problemlos auf den adhäsiven Kontakt erweitern/anwenden; die Eindringtiefe und die Normalkraft des dreidimensionalen adhäsiven Normalkontaktes gehen nach wie vor exakt aus seinem eindimensionalen Abbild hervor!

3.2.1 Andruck- und Abziehvorgang – Abreißbedingung

Der gedachte Andruck- und Abziehvorgang nach dem Grundgedanken der JKR-Theorie führt auf die Gleichgewichtskurven für den Kontakt mit Adhäsion, welcher wie eben geäußert durch den eindimensionalen Kontakt mit einer WINKLERSchen Bettung modelliert werden kann. Für den adhäsiven Kontakt eines konischen Indenters mit dem Halbraum ist in Abbildung 3.4 das Ersatzmodell skizziert. Es erklärt noch einmal den angesprochenen Mechanismus bis hin zum Gleichgewichtspunkt bei vorhandener Oberflächenenergie. Zunächst wird der modifizierte Stempel unter der Last $P_{\text{n.a.}}$ in die uniaxiale Schicht gedrückt. Die Federn am Kontaktrand $x = a$ besitzen dann gerade die ungespannte Länge ℓ_0 . Nehmen wir nun an, dass alle in Kontakt befindlichen Federn am Indenter adhieren – der Kontaktradius bleibt konstant – und wir die Normalkraft sukzessive reduzieren, dann werden vom Kontaktrand nach innen laufend immer mehr Federn auf Zug beansprucht.

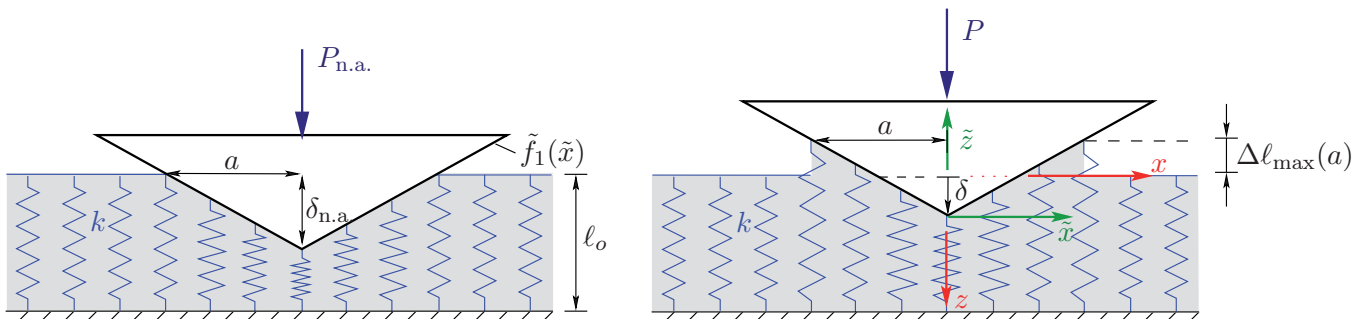


Abbildung 3.4: Qualitative Darstellung des Andruck- und Abziehvorgangs eines keilförmigen 1D-Indenters mit einer elastischen Bettung, welche die Eigenschaften des adhäsiven Kontaktes zwischen einem starren konischen Stempel und dem elastischen Halbraum *exakt* wiedergibt!

Erreicht die Längenänderung der äußeren Feder ($x = \pm a$) einen maximal zulässigen Wert $\Delta\ell_{\max}(a)$, so liegt ein indifferenter Zustand zwischen Haften und Abreißen vor. Diese von der Kontakthalbbreite a abhängige Schranke ist direkt aus (3.13) ersichtlich:

$$\Delta\ell_{\max}(a) = \sqrt{\frac{2\pi\tilde{\gamma}}{\tilde{E}}} a. \quad (3.30)$$

Der zugehörige Gleichgewichtszustand (P, δ, a) stimmt mit dem des dreidimensionalen adhäsiven Kontaktes exakt überein. Bei einer numerischen Umsetzung der elastischen Bettung durch eine äquidistante Anordnung von Federn verringert sich der Kontaktradius beim Abspringen der äußeren Feder um $\Delta\tilde{x}$. Unter der Voraussetzung, dass die Normalkraft ihren Wert nicht ändert, wird die Eindrücktiefe kleiner und die Längung der neuen Randfeder $\Delta\ell(a - \Delta\tilde{x})$ größer. Ist diese wiederum kleiner als die *neue* zulässige Längung $\Delta\ell_{\max}(a - \Delta\tilde{x})$ nach (3.30), so kann die Normalkraft weiter reduziert werden, bis sich jener Wert einstellt – ein weiterer Gleichgewichtspunkt des dreidimensionalen Kontaktes mit Adhäsion ist gefunden.

Bereits GEIKE zeigte in [32] die Möglichkeit auf, die klassische JKR-Theorie ($n = 2$) über das eindimensionale Federmodell zu beschreiben. Allerdings konnte er diesen Kontakt nur näherungsweise abbilden, da er die Adhäsionsenergie des Ersatzsystems anstelle des dreidimensionalen Originals berücksichtigte. Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell mit einer (von der Kontakthalbbreite a abhängigen) maximal zulässigen Federlängung liefert exakt die Ergebnisse der JKR-Theorie. Es genügt sogar deren Verallgemeinerung auf beliebig geformte axialsymmetrische Indenter (beliebige n). Die besondere Idee einer solchen (jedoch von der Kontakthalbbreite unabhängigen) Abreißbedingung wurde auch in [99] genutzt. Hierin konnte das Adhäsionsverhalten von ‘‘Haft pads’’ des sogenannten ‘‘Grünen Heupferdes’’ (*Tettigonia viridissima*) über eine flächenhafte Schicht von Longitudinalfedern äußerst genau wiedergegeben werden, was ein Vergleich mit Messergebnissen belegte.

Wenn wir in diesem Abschnitt von exakten dreidimensionalen Ergebnissen sprachen, dann bezog sich dies selbstverständlich nur auf das Tripel der globalen Größen (P, δ, a) , die Federspannungen können aufgrund ihrer lokal begrenzten Wirkung nicht dem Verlauf der axialsymmetrischen Flächenpressung genügen.

3.3 Anwendung des Korrespondenzprinzips auf den adhäsiven Kontakt

Die verallgemeinerte JKR-Theorie beinhaltet eine Überlagerung des nicht-adhäsiven Kontaktes mit einer Starrkörperverschiebung. Letztere tritt beim Kontakt mit einem starren zylindrischen Stempel auf. Wir haben bereits nachgewiesen, dass beide Teile für sich dem Korrespondenzprinzip genügen, dann wird dies ebenso für deren Superposition gelten!

3.3.1 Spannungen an der Oberfläche eines adhäsiven Kontaktes

Zu einem früheren Zeitpunkt wurde festgestellt, dass die Federspannungen des eindimensionalen Ersatzmodells (bis auf einen definierten konstanten Faktor) mit den fiktiven ebenen Randlasten übereinstimmen, welche einer Halbscheibe aufzuprägen wären, wenn die exakte Abbildung des Inneren im Vordergrund stände. Ist der Fokus allein auf die Kontaktspannungen gerichtet, so kann die ABEL-Rücktransformation (Korrespondenz) in der Form von BRACEWELL nach (2.103) direkt auf die Federspannungen angewendet werden. Diese Vorgehensweise wollen wir in der Folge für den beispielhaften Kontakt des kegelförmigen Indenters ($n = 1$) mit dem elastischen Halbraum erläutern, dessen (entdimensionalisiertes) keilförmiges Ersatzmodell in Abbildung 3.4 zu sehen ist. Die Längenänderung einer Feder an der Stelle \tilde{x} ist der Geometrie zu entnehmen

$$\Delta\ell(\tilde{x}) = c_1 \varkappa_1 |\tilde{x}| - \delta_{\text{n.a.}}(a) + \Delta\ell_{\text{max}}(a), \quad (3.31)$$

die Federspannungen⁶ ergeben sich damit zu

$$p_1^F(x) = -\frac{k\Delta\ell(x)}{\Delta y \Delta x} \stackrel{(3.30)}{=} \frac{k}{\Delta y \Delta x} \left[c_1 \varkappa_1 (a - |x|) - \sqrt{\frac{2\pi\tilde{\gamma}}{\tilde{E}}} a \right]. \quad (3.32)$$

Anwendung der genannten Transformation nach (2.103) liefert

$$\begin{aligned} p_1(r) &= \Delta y \mathcal{A}_{Br}^{-1} [p_1^F(x); r] \\ &= -\frac{\sqrt{8\pi\tilde{\gamma}\tilde{E}a^3}}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}} + \frac{\tilde{E}}{\pi} c_1 \varkappa_1 \operatorname{arccosh}\left(\frac{a}{r}\right) \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \frac{P - P_{\text{n.a.}}}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}} + \frac{P_{\text{n.a.}}}{\pi a^2} \operatorname{arccosh}\left(\frac{a}{r}\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Beziehen wir nun noch die Spannungsverteilung (3.33) auf den mittleren Druck $\bar{p}_{\text{n.a.}} := \frac{P_{\text{n.a.}}}{\pi a^2}$, welcher sich im nicht-adhäsiven Fall unter der Last $P_{\text{n.a.}}$ bei gleichem Kontaktradius a einstellen würde

$$\underbrace{\frac{p_1(r)}{\bar{p}_{\text{n.a.}}}}_{=: \tilde{p}(r)} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{P_{\text{n.a.}}} - 1 \right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}}_{=: \tilde{p}_T} + \underbrace{\operatorname{arccosh}\left(\frac{a}{r}\right)}_{=: \tilde{p}_{\text{n.a.}}}. \quad (3.34)$$

Diese Abhängigkeit ist in Abbildung 3.5 (links) für den Fall $P = 0$ grafisch veranschaulicht, zudem strichliert die zu überlagernden Teillösungen gekennzeichnet. Während $\tilde{p}_{\text{n.a.}}$ die Verteilung des nicht-adhäsiven Kontaktes reflektiert, soll der Index T in \tilde{p}_T den Translationsanteil kennzeichnen. Die Spannungen streben daher sowohl in der Mitte ($r = 0$) als auch am Kontaktrand ($r = a$) gegen unendlich, unterscheiden sich jedoch im Vorzeichen; am Rande wird eine Zugbeanspruchung vorliegen.

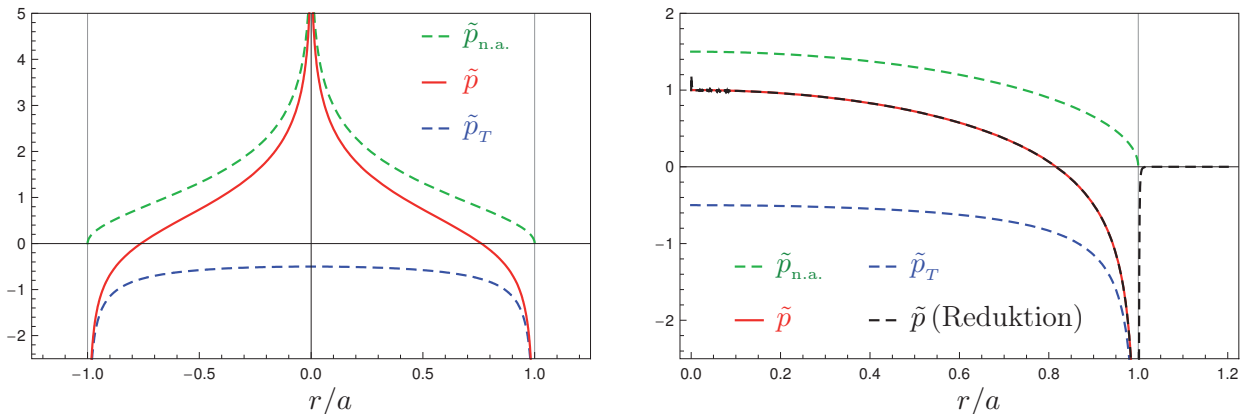


Abbildung 3.5: Die Kontaktspannungen \tilde{p} für einen adhären den kegelförmigen (links) und parabolischen Indenter (rechts) bei verschwindender externer Kraft interpretierbar als Superposition der Spannungen im nicht-adhäsiven Kontakt $\tilde{p}_{\text{n.a.}}$ mit einem Translationsanteil \tilde{p}_T ; Werte sind auf den jeweiligen mittleren Druck im nicht-adhäsiven Analogon $\bar{p}_{\text{n.a.}}$ normiert.

⁶Druckspannungen wurden gemäß Federkinematik auf Seite 38 positiv gezählt.

Dass die Gleichung (3.33) mit der analytischen Lösung des Problems übereinstimmt, kann man in [68] nachlesen. Die Idee der zusätzlichen Visualisierung von Überlagerungsanteilen stammt von dort⁷.

3.3.2 Vergleichsspannungen im Halbraum für den adhäsiven Kontakt eines Paraboloids

Zuletzt wollen wir die Spannungen im Inneren des elastischen Halbraums für einen Kontakt mit Adhäsion aus unserem Reduktionsprozess gewinnen. Leider existieren nur sehr wenige analytische Vergleichsmöglichkeiten, was u.a. daran liegt, dass die Verallgemeinerung der JKR-Theorie auf beliebig geformte Indenter noch sehr jung ist. Außerdem galt das hauptsächliche Interesse der maximalen Abzugskraft bzw. der Abhängigkeit der externen Kraft von Kontaktradius und Eindringtiefe. BARQUINS und MAUGIS [7] erweiterten die Gleichungen von HERTZ/HUBER für den Kugelkontakt mit Adhäsion; (grafische) Ergebnisse gibt MAUGIS in [66] wieder. Ausgewählte Resultate sollen im folgenden mit Hilfe der Reduktion verifiziert werden. Zur Erinnerung wird kurz die Vorgehensweise wiederholt.

Gehen wir einmal davon aus, dass das eindimensionale Federmodell mit der veränderten Geometrie bereits hergestellt ist, desweiteren die P - δ - a -Zusammenhänge durch (numerischen) Eindruck des 2D-Stempels in die uniaxiale Schicht für den Kontakt mit Adhäsion bekannt sind. Durch den vorausgehenden Andruckvorgang kennen wir auch die analogen Größen für den Kontakt ohne Adhäsion ($P_{n.a.}$, $\delta_{n.a.}$), die zum gleichen Kontaktradius a führen wie im Fall mit Adhäsion. Darüber hinaus können wir aus dem in Abschnitt 3.2.1 geschilderten (adhäsiven) Mechanismus die (fiktiven) Federspannungen abgreifen, welche nach (2.101) die Randbeanspruchungen darstellen, die einer homogenen Halbscheibe aufzuprägen sind. Normiert auf den mittleren Druck $\bar{p}_{n.a.}$ ergibt sich diese dynamische Eingangsgröße zu

$$\frac{p_2(x)}{\bar{p}_{n.a.}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta y} \left[\frac{3}{4}\pi a \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{2}\pi a \left(1 - \frac{P}{P_{n.a.}} \right) \right]. \quad (3.35)$$

Gilt unser Interesse nun alleine den Spannungen in der Kontaktfläche, könnten wir auf entsprechende Gleichungen des letzten Kapitels zurückgreifen:

$$\underbrace{\frac{p_2(r)}{\bar{p}_{n.a.}}}_{=: \tilde{p}(r)} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{P_{n.a.}} - 1 \right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2}}}_{=: \tilde{p}_T} + \underbrace{\frac{3}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2}}_{=: \tilde{p}_{n.a.}}. \quad (3.36)$$

Zur Ermittlung der Felder im Halbraum müssen zunächst die sich in der Halbscheibe unter der (fiktiven) Randlast einstellenden ebenen Felder bestimmt werden. Dies kann mit einem beliebigen Simulationsprogramm (FEM, MPS, MCA etc.) erfolgen. In dieser Arbeit wurden die zugehörigen FOURIER-Integrale mit MATHEMATICA gelöst. Im letzten Schritt sind die mit den Korrespondenzen verketteten Linienintegrale (siehe Tabellen 2.1, 2.2) auszuwerten, auch dazu wurde die genannte Software gebraucht. Selbstverständlich deckt der Wertebereich der so gewonnenen Lösungen auch die Ränder ab. Abbildung 3.5 (rechts) zeigt sowohl die analytische Lösung inklusive ihrer superponierten Anteile gemäß (3.36) als auch die numerischen Resultate an der Oberfläche nach Ausführung des angesprochenen Reduktionsalgorithmus für den Fall verschwindender externer Kraft $P = 0$. Bis auf geringfügige "Fluktuationen" in der Numerik sind keinerlei Unterschiede feststellbar!

⁷In [68] passt die Grafik nicht zum Ergebnis; vermutlich wurde dem nicht-adhäsiven Anteil ein Faktor 0.5 zu viel gegeben!

In Anlehnung des erwähnten Vergleiches mit existierenden analytischen Lösungen ist die Erwähnung einer weiteren Festigkeitshypothese erforderlich. Nach VON MISES setzt erstmaliges Plastizieren ein, wenn die zweite Invariante des Spannungsdeviators J_2 einen kritischen Wert übersteigt. Da der Deviator die Distorsion des Stoffes beschreibt, wird auch von Gestaltänderungsenergiehypothese gesprochen. Die Definition der zweiten Invarianten des Deviators und deren Formulierung mit Hilfe der Hauptspannungen (2.111) lautet

$$\begin{aligned} J_2 &:= \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{S}}) = \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{S} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \cdot \mathbf{S})\mathbf{I} \right) \cdot \left(\mathbf{S} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \cdot \mathbf{S})\mathbf{I} \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Über die Fließschubspannung τ_F bei einem reinen Scherversuch bzw. die Fließnormalspannung σ_F bei einem einachsigen Zugversuch kann das Fließkriterium wie folgt geschrieben werden

$$\tau_F = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_F = \sqrt{J_2}. \quad (3.38)$$

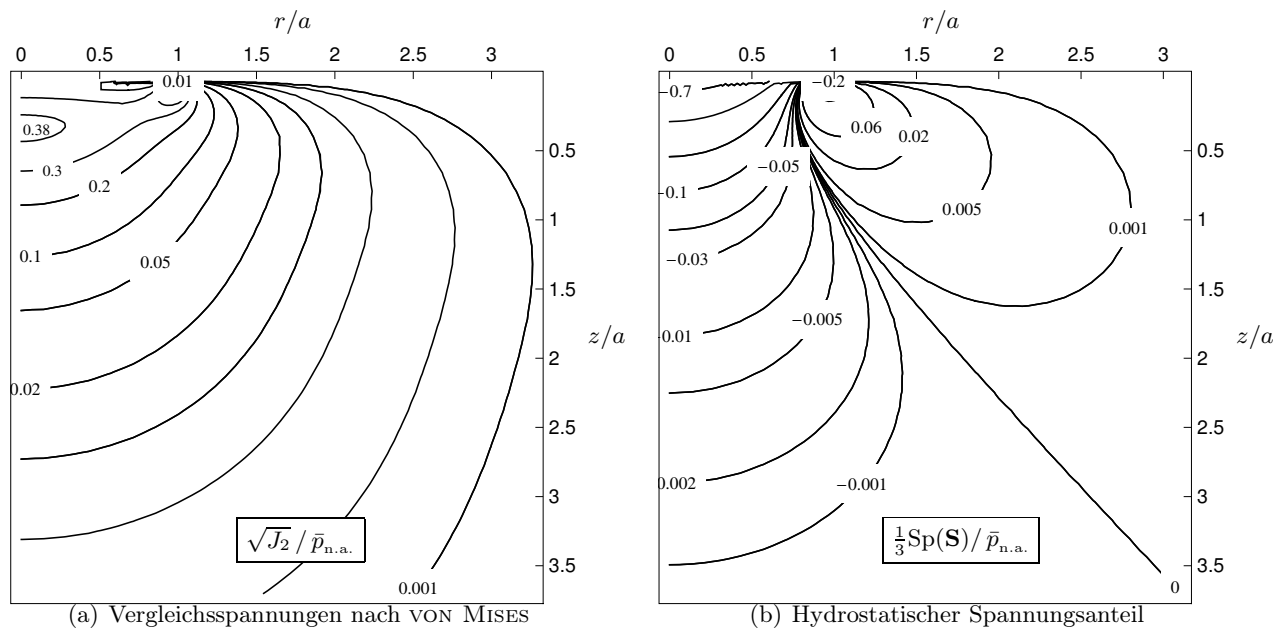


Abbildung 3.6: Normierte Vergleichsspannungen nach VON MISES und hydrostatischer Spannungsanteil für den adhäsiven Kontakt des elastischen Halbraums mit einem parabolischen Stempel ($\nu = 0.25$) im besonderen Fall verschwindender externer Kraft $P = 0$.

Die Linien gleicher Spannungen $\sqrt{J_2}$ nach dem Vergleichskriterium⁸ sind linkerhand in Abbildung 3.6 grafisch veranschaulicht. Desweiteren ist der hydrostatische Druck (rechts) gemäß $\frac{1}{3}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{I})$ dargestellt. Beide Verläufe wurden für eine Querdehnzahl $\nu = 0.25$ bei verschwindender externer Normalkraft $P = 0$ mit Hilfe der *Dimensionsreduktion* erzeugt. Ein Vergleich mit entsprechenden Abbildungen in [66] bestätigt nachfolgende Aussage eindrucksvoll:

⁸Multiplikation mit $\sqrt{3}$ würde die einachsige Vergleichsspannung des räumlichen Spannungszustandes ergeben!

Die Korrespondenzen zwischen ebenen und axialsymmetrischen Kontaktzuständen bleiben auch für den Kontakt mit Adhäsion gültig. Dies ermöglicht wiederum die exakte Abbildung aller Feldgrößen im Inneren des Halbraums über ein ebenes Ersatzsystem. In Verbindung mit dem eindimensionalen Federmodell, welches auch für adhäsive Kontakte die makroskopischen Größen P , δ und a exakt hergibt (siehe Abschnitt 3.2), ist die Ausdehnung des Reduktionsprozesses auf Kontakte mit Adhäsion vollständig gelungen!

Kapitel 4

Reduktionen auf Basis inhomogener ebener Medien – Graded Materials

Ein ausgezeichnetes Modell zur vollständigen Abbildung des axialsymmetrischen Kontaktes mit und ohne Adhäsion wurde in den vergangenen Kapiteln vorgestellt. Trotz der enormen Einsparung von Freiheitsgraden bei exakter Wiedergabe aller dreidimensionaler Ergebnisse ist es naturgemäß, zu hinterfragen, ob die Effizienz der Reduktion noch gesteigert werden kann. Nehmen wir beispielsweise das zur Bestimmung der inneren Beanspruchungen auszuführende Linienintegral nach dem Korrespondenzprinzip, welches physikalisch bedeutet, dass die Spannungen an einem Punkt in der Tiefe z des axialsymmetrischen Halbraums von den gedachten Spannungen *aller Punkte* in der gleichen Tiefe z des fiktiven ebenen Mediums abhängen. Selbstverständlich könnte man den Einflussbereich im Sinne einer Näherungslösung durch eine Fehlerrechnung eingrenzen und damit den Rechenaufwand (zu Lasten der Genauigkeit) reduzieren, aber eben nicht vollständig einsparen. Erstrebenswert wäre daher ein fiktives ebenes Medium, dessen materielle Punkte sich nach entsprechender Beanspruchung genauso verhalten, wie die des dreidimensionalen Analogons. Diese Zielvorgabe erscheint aufgrund der unterschiedlichen Natur von zwei und dreidimensionalen homogenen, isotropen Kontinua unerreichbar. Sie vermittelt aber zugleich eine Idee, nämlich ein *inhomogenes Ersatzsystem* mit solchen Abbildungseigenschaften zu entwickeln, womit wir uns in den nachfolgenden Abschnitten beschäftigen wollen.

4.1 Selbstähnlichkeit und Gleichgewicht

Ausgangspunkt soll das Problem von KELVIN bilden, d.h. eine Einzelkraft (in z -Richtung), welche innerhalb des homogenen, isotropen elastischen “Vollraums” wirke, zudem nutzen wir Kugelkoordinaten R, φ, θ zur Feldbeschreibung, wobei der Kraftangriffspunkt zugleich Ursprung des Koordinatensystems sei. Aufgrund der *Selbstähnlichkeit*¹ der Aufgabe werden Änderungen in der *Form der Lösung* mit φ, θ unabhängig vom radialen Abstand R sein – die Lösung genügt dem Produktansatz

$$f(R, \varphi, \theta) = f_1(R) \cdot f_2(\varphi, \theta) . \quad (4.1)$$

Identifizieren wir $f(R, \varphi, \theta)$ mit einer Spannungskomponente σ_{ij} , so führt die Auswertung des Gleichgewichtes angewendet auf z.B. zwei freigeschnittene Kugeloberflächen unterschiedlicher Radien (also zweier selbstähnlicher Oberflächen) auf den bekannten Abfall der Spannungen $\sigma_{ij} \sim \frac{1}{R^2}$. Das HOOKEsche Gesetz gepaart mit den Verschiebungs-Verzerrungsgleichungen erklärt dann das typische

¹Näheres dazu siehe Seite 139 ff. in [6].

Verhalten der Verschiebungen $u_i \sim \frac{1}{R}$. Sämtliche Feldgrößen streben demnach für $R \rightarrow \infty$ gegen *Null*, ein Merkmal, das wir bereits für die Untersuchung der Halbraumlösungen mittels HANKEL-Transformation ausnutzten.

Im zweidimensionalen zeigen diese Größen aber andere Eigenschaften. Betrachten wir dazu den unendlichen Keil im ebenen Verzerrungszustand (EVZ) aus Abbildung 4.1, der an seiner Spitze durch eine horizontale Q und vertikale Linienlast P beansprucht wird. Logischerweise existiert auch hier keine ‐charakteristische Länge‐, sodass ebenfalls ein selbstähnliches Problem vorliegt, allerdings implizieren die Gleichgewichtsbedingungen ein Abklingen der Spannungen gemäß $\sigma_{ij} \sim \frac{1}{R}$, da die Fläche, welche die Linienlasten übertragen muß, nur *linear* mit dem radialen Abstand wächst.

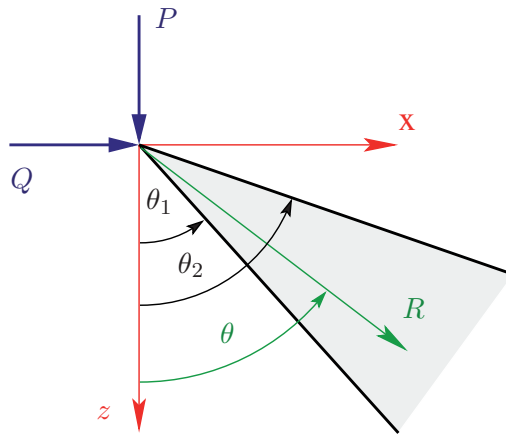


Abbildung 4.1: Unendlicher Keil beansprucht an seiner Spitze durch eine horizontale und vertikale Linienlast.

Die Verschiebungen u_i , welche sich quasi aus der Integration der Spannungen berechnen lassen, ändern sich *logarithmisch* mit dem Radius ($u_i \sim \ln R$). Der Logarithmus ist aber nicht begrenzt im Unendlichen, weshalb die Verschiebungen nur relativ zu einer Bezugsverschiebung in der Momentenkonfiguration angegeben werden können.

Im Hinblick auf die Vorgabe, die Eigenarten des axialsymmetrischen Kontaktes abzubilden, muss ein solcher Translationsfreiheitsgrad unbedingt unterbunden werden. Dies veranlasste uns, dem zweidimensionalen Kontinuum eine veränderliche Steifigkeit zuzuordnen; mit steigendem Abstand vom beanspruchten Gebiet sollte der E -Modul zunehmen, so dass im ‐Unendlichen‐ eine Art ‐Starrheit‐ vorliegt. Wie wir später sehen werden, lässt sich mit dem richtigen Ansatz $E(R, \theta)$ tatsächlich ein Verschiebungsverlauf $u_i \sim \frac{1}{R}$ einstellen. Dennoch können wir hierdurch *nicht* den gewünschten Effekt für die Spannungen $\sigma_{ij} \sim \frac{1}{R^2}$ erzeugen, da sowohl die Selbstähnlichkeit als auch die Gleichgewichtsbedingungen den qualitativen Verlauf $\sigma_{ij} \sim \frac{1}{R}$ *unabhängig vom Elastizitätsmodul* diktieren! Bei der anschließenden Untersuchung speziell des Verhaltens einer inhomogenen Halbebene mit $E(z) \sim z$ stoßen wir allerdings auf einige andere interessante Aspekte, welche für Reduktionszwecke von Bedeutung sind.

4.2 Halbebene mit einem mit der Tiefe z veränderlichen E -Modul

Die Untersuchung inhomogener elastischer Medien ist vorallem für die Geomechanik von großer Bedeutung, da sie u.a. zur Aufgabe hat, das Verhalten unterschiedlich gearteter Fundamente zu

studieren. Es ist daher einsichtig, dass die ersten Veröffentlichungen aus diesem Gebiet stammen. BOROWICKA [11] gab bereits 1943 auf Basis von unendlichen Reihen mathematische Lösungen für die Druckausbreitung im Halbraum bei linear mit der Tiefe zunehmendem Elastizitätsmodul an. Die Rechtfertigung seines Ansatzes für die Inhomogenität geht dabei auf das 1934 erschienene Werk von FRÖHLICH [29] zurück, welcher sich mit der Druckverteilung im Baugrund beschäftigte.

LEKHNITZKII [63] widmete sich 1962 der Aufgabe, herauszufinden, welche Forderungen an Elastizitätsmodul und Querkontraktion zu stellen sind, damit sich in dem zugehörigen inhomogenen Keil nach Abbildung 4.1 ein reiner Radialspannungszustand ($\sigma_{R\theta} = 0 \wedge \sigma_{\theta\theta} = 0$) einstellt. Speziell die Lösungen für den Elastizitätsmodul $E(R, \theta)$ bei konstanter Querdehnzahl leitete er her, dazu zählt auch das im Anhang E diskutierte Potenzgesetz $E(R, \theta) = m_E R^\alpha \cos^\alpha \theta$ mit $0 < \alpha \leq 1$; genaugenommen ist LEKHNITZKII sogar die folgende wichtige Erkenntnis zuzuschreiben:

Die Spannungsverteilung innerhalb eines linear-inhomogenen, inkompressiblen Halbraums im ebenen Verzerrungszustand unter Wirkung einer Normalkraft ist exakt gleich jener im analogen homogenen elastischen Halbraum!

Häufig wird auch GIBSON als Begründer dieser Erkenntnis genannt, da er in seinem viel zitierten Paper [35] von 1967 sowohl für den durch eine konstante streifenförmige als auch axialsymmetrische Normaldruckverteilung beanspruchten linear-inhomogenen inkompressiblen Halbraum mit Hilfe von Integraltransformationen zu dem gleichen Ergebnis gelangte. Darüberhinaus untersuchte er für ein solches Medium² die Normalverschiebungen und konnte ein wesentliches Verhalten aufzeigen:

Die Normalverschiebungen innerhalb eines linear-inhomogenen, inkompressiblen Halbraums unter Wirkung einer konstanten streifenförmigen bzw. axialsymmetrischen Normaldruckverteilung bleiben überall endlich! Speziell an der Oberfläche sind die Normalverschiebungen direkt proportional zur Normaldruckverteilung und verschwinden damit außerhalb des Kontaktgebietes – der Halbraum reagiert als WINKLERSche Bettung!

Zusammen mit AWOJOBI [5] wurden Berechnungen zum *kompressiblen* linear-inhomogenen Medium getätigt. Entgegen den finiten Normalverschiebungen außerhalb des Kontaktgebietes ergab sich innerhalb wiederum die Überlagerung mit einer unbestimmten Starrkörpertranslation. Ferner stellten sie fest, dass die Spannungen sehr empfindlich auf Änderungen in der Querkontraktionszahl reagieren!

Selbstverständlich hat man in der Vergangenheit noch weitaus mehr Ansätze für die Inhomogenität des Kontinuums gemacht. Eine relativ aktuelle Übersicht bestehender analytischer und numerischer Lösungen (im Falle der vertikalen Punktlast) beinhaltet das Schriftum von WANG [117]; in seiner allgemeinen Zusammenfassung von analytischen Methoden in der Geomechanik [104] gibt auch SELVADURAI umfassende Literatur an. Die Konzentration dieser Arbeit galt allerdings – nicht zuletzt aufgrund der oben erwähnten interessanten Eigenschaften – dem linear-inhomogenen Halbraum, dessen Fundamentallösungen als Sonderfall aus den mathematischen Überlegungen zum Potenzansatz nach Anhang E hervorgehen.

4.2.1 GREEN-Funktionen für die linear-inhomogene Halbebene

Zur mathematischen Beschreibung des zweidimensionalen elastischen Problems – ein linear-inhomogener elastischer Halbraum (im EVZ) beansprucht durch eine bezogene normale und vertikale Einzelkraft

²In der Literatur ist häufig auch vom GIBSON-Medium die Rede, wenn es sich um einen linear-inhomogenen Halbraum handelt; bei den meisten Autoren wird dabei zusätzlich Inkompressibilität vorausgesetzt!

$[P, Q] = N/m$ im Koordinatenursprung – müssen wir in Anhang E lediglich $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ beachten. Aus den globalen Gleichgewichtsbedingungen (E.9) ergaben sich die Integrationskonstanten (E.10) und (E.11), welche unter Beachtung der besonderen Inhomogenität $\alpha = 1$ wie folgt lauten:

$$C(1, \beta) = \frac{2(1-\nu^2)}{m_E} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}{\pi} P \quad (4.2)$$

$$D(1, \beta) = \frac{4(1-\nu^2)}{\beta m_E} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}{\pi} Q \quad \text{mit} \quad \beta = \sqrt{2 \frac{1-2\nu}{1-\nu}}. \quad (4.3)$$

Das Einsetzen dieser Konstanten in (E.8) liefert die gesuchten Verschiebungskomponenten und die Radialspannung:

$$u_R(R, \theta) = \frac{1}{R} \frac{1-\nu^2}{m_E} F_{1\beta} \left[P \cos(\beta\theta) + \frac{2}{\beta} Q \sin(\beta\theta) \right] \quad (4.4)$$

$$u_\theta(R, \theta) = \frac{1}{R} \frac{1-\nu^2}{m_E} F_{1\beta} \left[-\frac{\beta}{2} P \sin(\beta\theta) + Q \cos(\beta\theta) \right] \quad (4.5)$$

$$\sigma_{RR}(R, \theta) = -\frac{\cos\theta}{R} F_{1\beta} \left[P \cos(\beta\theta) + \frac{2}{\beta} Q \sin(\beta\theta) \right] \quad \text{mit} \quad F_{1\beta} := \frac{2\Gamma\left(2 - \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}{\pi}. \quad (4.6)$$

Im weiteren möchte ich nun den Einfluss der vertikalen und horizontalen Einzelkraft separat diskutieren, dabei speziell auf die Abhängigkeit der Lösungen von der Querdehnzahl ν näher eingehen.

Vertikale Einzellast auf linear-inhomogenem Halbraum im EVZ

Abbildung 4.2 zeigt sowohl den Verlauf der Tangentialverschiebungen u_θ als auch den der Radialspannungen σ_{RR} gemäß Gleichungen (4.5) und (4.6). Hierbei wurde zunächst von einer reinen Normalbeanspruchung ausgegangen ($Q = 0$), ferner verschiedene POISSONZahlen zwischen $\nu = 0$ und $\nu = 0.5$ untersucht.³ Beide Feldgrößen zeigen für ein *inkompressibles Medium* besondere Charakteristika. Die Tangentialverschiebungen u_θ verschwinden für ein solches Medium, d.h. auch die Normalverschiebungen an der Oberfläche $\bar{u}_z(x=R) \equiv -u_\theta(R, \theta = \pi/2)$ sind abgesehen vom Kraftangriffspunkt überall Null – eine Eigenschaft, welche für das Verhalten als WINKLERSche Bettung notwendig ist.

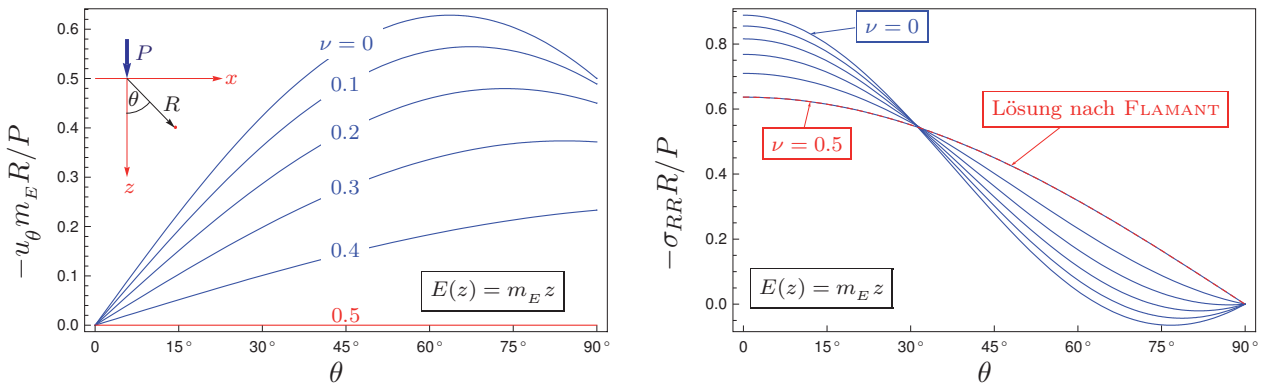


Abbildung 4.2: Normierte Tangentialverschiebung und normierte Radialspannung aufgetragen über den Winkel θ parametrisiert durch die Querkontraktionszahl ν bei Beanspruchung des linear-inhomogenen Halbraums durch eine vertikale Linienlast P (EVZ).

³Es sei vermerkt, dass die graphischen Verläufe in [9] einen anderen Sachverhalt klären. Dort wird nämlich der Einfluss verschiedener Inhomogenitäten bei ein und derselben Querkontraktion ($\nu = 0.25$) visualisiert!

Die Graphen der Funktionenschar für die normierten Radialspannungen sind rechterhand skizziert. Ebenfalls eingezeichnet sind die Spannungen im *homogenen Halbraum* nach FLAMANT (integrierte BOUSSINESQ Lösung), welche *unabhängig* von der POISSONZahl sind. Sie stimmen wie erwartet exakt überein mit denen im *inkompressiblen linear-inhomogenen Halbraum* – dies entspricht der eingangs erwähnten Feststellung von LEKHNITSKII [63]. Nebenbei bemerkt, schneiden sich die einzelnen Graphen *nicht* in einem gemeinsamen Punkt. Desweiteren hängen die Radialverschiebungen u_R nur vom Radius R nicht aber vom Winkel θ ab. Fassen wir die GREENfunktionen für das durch eine vertikale Linienlast beanspruchte GIBSONmedium ($\alpha = 1$, $\nu = 0.5$) noch einmal zusammen:

$$u_\theta(R, \theta) = 0 \quad u_R(R, \theta) = \frac{3P}{2\pi m_E R} \quad \sigma_{RR}(R, \theta) = -\frac{2 \cos \theta P}{\pi R}. \quad (4.7)$$

Die genannten Besonderheiten im Verhalten eines elastischen, volumenerhaltenden Mediums, dessen Elastizitätsmodul direkt proportional zur Tiefe z ansteigt, ermöglicht eine unmittelbare (zu einem Teil eingeschränkte) Anbindung an den Algorithmus der *Dimensionsreduktion*, worauf nach einer kurzen für spätere Zwecke wichtigen Zusammenfassung der zugehörigen Fundamentallösungen für die Beanspruchung durch eine horizontale Linienlast näher eingegangen wird!

Horizontale Einzellast auf linear-inhomogenem Halbraum im EVZ

Mit Ausnahme der in Kapitel 2.4.1 hergeleiteten Korrespondenzen wurden in dieser Arbeit bisher nur reibungsfreie Kontakte abgebildet. Abschnitt 4.3 wird in dieser Hinsicht eine Neuerung darstellen. Hier wird der Versuch erfolgen, zumindest grundlegende Eigenschaften des Tangentialkontaktes zwischen einer Kugel und dem homogenen elastischen Halbraum durch ein Modell niedrigerer räumlicher Dimension zu beschreiben. Dazu soll u.a. ein linear-inhomogenes zweidimensionales Kontinuum herangezogen werden, weshalb unten dessen Antwort auf eine horizontale Einzellast Q (Linienkontakt!) gemäß der entsprechenden Anteile der Gleichungen (4.4)-(4.6) graphisch veranschaulicht wurde (siehe Abbildung 4.3).

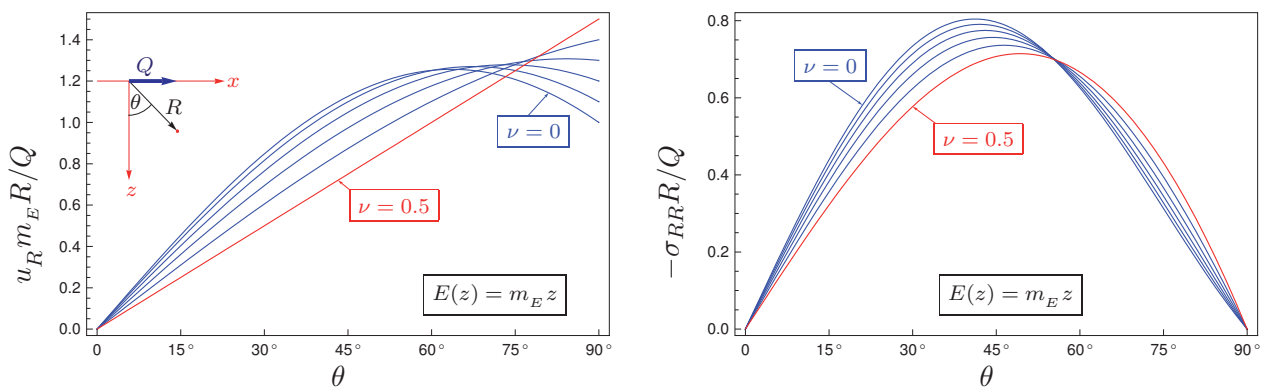


Abbildung 4.3: Normierte Radialverschiebung und normierte Radialspannung aufgetragen über den Winkel θ parametrisiert durch die Querkontraktionszahl ν bei Beanspruchung des linear-inhomogenen Halbraums durch eine horizontale Linienlast Q (EVZ).

Auffallen tut wiederum der inkompressible Fall. In diesem ist die Radialverschiebung direkt proportional dem Winkel. Auf die Darstellung der Radialverschiebung, hervorgerufen durch eine *Vertikallast*, wurde bisher verzichtet. Das möchte ich an dieser Stelle nachholen, da eine besondere Verbindung zu den Tangentialverschiebungen u_θ bei horizontalem Lastangriff besteht, welche aus den ebengenannten Gleichungen sofort ersichtlich ist:

$$\frac{\{u_\theta(R, \theta)\}_Q}{Q} = \frac{\{u_R(R, \theta)\}_P}{P}. \quad (4.8)$$

Darin stehen die Indizes Q und P für *entkoppelte Vertikal- und Horizontalbeanspruchungen*, das heißt, dass die Tangentialverschiebungen u_θ aufgrund einer reinen Horizontallast genauso groß sind wie die Radialverschiebungen, welche durch eine vertikale Einzellast hervorgerufen werden.⁴

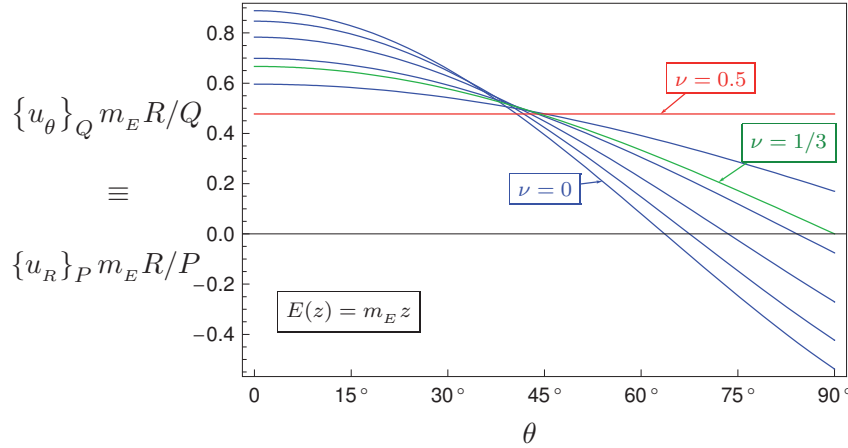


Abbildung 4.4: Radialverschiebung aufgrund einer Vertikallast $\{u_R(R, \theta)\}_P$ und Tangentialverschiebung aufgrund einer Horizontallast $\{u_\theta(R, \theta)\}_Q$ in normierter Gestalt aufgetragen über den Winkel θ parametrisiert durch die Querkontraktionszahl ν (EVZ).

Abbildung 4.4 deckt auf, dass die Tangentialverschiebung eines materiellen Punktes des GIBSON-Körpers ($\nu = 0.5$) verursacht durch eine Horizontalkraft unabhängig vom Winkel und *stets positiv* ist! Für die Normalverschiebung der Oberfläche \bar{u}_z bedeutet dies, dass sich das Material “vor der Kraft” Q (meint vor dem Kraftpfeil) *nach oben* und “hinter ihr” *nach unten* verschiebt. Ein solches Verhalten ist insofern interessant, da es nicht für alle Querkontraktionen gilt. Für eine Poissonzahl $\nu = 1/3$ (grünmarkierter Graph in Abbildung 4.4) gibt es keine Oberflächennormalverschiebung, während für $\nu < 1/3$ der entgegengesetzte Effekt eintritt, welcher u.a. auch beim *punktförmigen Tangentialkontakt* mit dem homogenen elastischen Halbraum zu beobachten ist: *Vor der Horizontalkraft senkt sich das Medium, hinter ihr hebt es sich.*

Zusammenfassend notieren wir uns noch einmal die Fundamentallösungen eines durch eine horizontale Linienlast beanspruchten GIBSON-Mediums ($\alpha = 1$, $\nu = 0.5$):

$$u_\theta(R, \theta) = \frac{3Q}{2\pi m_E R} \quad u_R(R, \theta) = \frac{3\theta Q}{\pi m_E R} \quad \sigma_{RR}(R, \theta) = -\frac{4\theta \cos \theta Q}{\pi R}. \quad (4.9)$$

4.2.2 Abbildung *inkompressibler* elastischer Materialien in axialsymmetrischen Kontakten – Anbindung an den Algorithmus der Dimensionsreduktion

Wie die Überschrift andeutet, beschränken wir uns in den nächsten Zeilen auf ein *inkompressibles elastisches*, aber *homogenes Material*, welches einer axialsymmetrischen Normaldruckverteilung ausgesetzt ist. *Die Abbildung derartiger Kontakte über Modelle geringerer räumlicher Dimension ist uns*

⁴Dieser Zusammenhang gilt sogar für beliebige $\alpha \in (0; 1]$ und $\nu \in [0; 0.5]$; in der Äußerung wurden *Einslasten* vorausgesetzt!

bereits vollständig gelungen. Dem Leser sei hierzu der auf Seite 51 schrittweise erklärte Algorithmus nahegelegt, der selbstverständlich auch auf inkompressible Stoffe anwendbar ist. Jenes rechtfertigt die folgende Frage:

„Welchen Sinn macht es, sich hier abermals mit der Abbildung solcher Kontakte zu beschäftigen, wenn doch schon ein mächtiges Werkzeug zur Verfügung steht?“

Die Antwort ist sofort einleuchtend, wenn wir uns an das eingangs von Kapitel 4 erwähnte Bestreben nach weiterer Vereinfachung erinnern. Das besondere Verhalten eines linear-inhomogenen inkompressiblen Kontinuums im EVZ als WINKLERSche Bettung liefert uns in dieser Hinsicht einiges Potenzial.

Die Fundamentallösungen (4.7) auf Seite 71 erfüllen diesbezüglich bereits ein Kriterium, nämlich, dass die Vertikalverschiebungen der Oberfläche \bar{u}_z überall Null sind, abgesehen von einer Singularität an der Lastangriffsstelle. Aufgrund der Gültigkeit des Superpositionsprinzips können wir daraus schließen, dass auch bei einem verteilten Normaldruck $p(x)$ an der Oberfläche außerhalb des beaufschlagten Gebietes diese Eigenschaft anhält. Die direkte Proportionalität zwischen $p(x)$ und $\bar{u}_z(x)$ innerhalb der beanspruchten Fläche nachzuweisen, wird allerdings hierdurch erschwert, da zunächst für einen Punkt innerhalb des Kontinuums ($z > 0$) dessen vertikale Verschiebung zu ermitteln ist, um dann im Anschluss den Grenzübergang $z \rightarrow 0$ auszuführen. Derart sind CALLADINE und GREENWOOD in [21] vorgegangen, wobei sie von einer konstanten Normaldruckverteilung ausgingen.

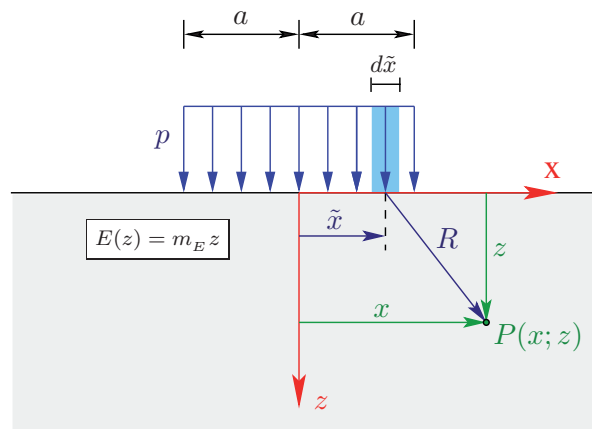


Abbildung 4.5: Zur integralen Berechnung der Verschiebungen eines Punktes $P(x; z)$ innerhalb des GIBSONkörpers im EVZ bei konstanter Normaldruckverteilung.

Die Verschiebung eines Punktes im linear-inhomogenen, inkompressiblen Halbraum aufgrund einer vertikalen (linienförmigen) Einzellast erfolgt nach (4.7) lediglich in radiale Richtung, dessen vertikale Komponente macht daher allein u_z aus

$$u_z(R, \theta) = u_R(R, \theta) \cos \theta \stackrel{(4.7)}{=} \frac{3P \cos \theta}{2\pi m_E R} \quad (4.10)$$

und lautet in kartesischen Koordinaten

$$u_z(x, z) = \frac{3P}{2\pi m_E} \frac{z}{x^2 + z^2}. \quad (4.11)$$

Bei der konstanten Druckverteilung nach Abbildung 4.5 resultiert die Verschiebung aus der Überlagerung der Anteile, welche durch die Linienkraftdifferenziale $p d\tilde{x}$ zustande kommen. Derart erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_z(x, z) &= \frac{3p}{2\pi m_E} \int_{-a}^a \frac{z}{(x - \tilde{x})^2 + z^2} d\tilde{x} \\
&= \frac{3p}{2\pi m_E} \left[\arctan\left(\frac{x+a}{z}\right) - \arctan\left(\frac{x-a}{z}\right) \right], \tag{4.12}
\end{aligned}$$

woraus sich nach besagtem Grenzübergang die Oberflächennormalverschiebung innerhalb und außerhalb des beanspruchten Gebietes ergibt

$$\bar{u}_z(x) := \lim_{z \rightarrow 0} u_z(x, z) = \begin{cases} \frac{3p}{2m_E} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}. \tag{4.13}$$

Aus Gleichung (4.13) können wir die gesuchte Proportionalität zwischen \bar{u}_z und p direkt ablesen; sie hat auch dann noch Bestand, wenn anstelle einer konstanten eine mit x veränderliche Streckenlast wirkt. Das ist ebenfalls eine Folge des Superpositionsprinzips, denn eine x -abhängige Linienlast ist aus zahlreichen konstanten Streckenlasten geringer Breite zusammensetzbar. Mit Einführung der WINKLERSchen Steifigkeit⁵ k_W halten wir fest:

$$p(x) = k_W \bar{u}_z(x) \quad \text{mit} \quad k_W := \frac{2}{3} m_E. \tag{4.14}$$

Neben der Einfachheit dieses Ergebnisses möchte ich unbedingt noch einmal hervorheben, dass es *keine Unbestimmtheit* mehr in der Lösung gibt, die bei homogenen ebenen Systemen immer auftrat. Ferner sei darauf hingewiesen, dass nur für $\nu = 0.5$ der Translationsfreiheitsgrad (sowohl horizontal als auch vertikal) genommen wird, für $0 \leq \nu < 0.5$ ist das zumindest innerhalb des Kontaktgebietes nicht realisierbar (siehe dazu [5])! Die Unbestimmtheit kann im übrigen auch durch Änderung des Exponenten der Inhomogenität unterdrückt werden. Für $0 < \alpha < 1$ ist das sogar für alle Querdehnzahlen $0 \leq \nu \leq 0.5$ der Fall. Eine ausgezeichnete tabellarische Übersicht des Verhaltens in Abhängigkeit von α und ν befindet sich in [112].

Erinnern wir uns zurück an das eindimensionale Federmodell, welches nach einer auf den Formfaktor \varkappa basierenden Geometrieänderung des Originalindenters dessen reibungsfreien Normalkontakt mit dem elastischen Halbraum hinsichtlich aller Zusammenhänge makroskopischer Größen $P - \delta - a$ exakt abbilden konnte. Die Oberfläche des vorliegenden GIBSON-Mediums reagiert auf äußere Normalspannungen genauso wie das eindimensionale Modell, also mit lokal proportionalen Normalverschiebungen; demnach kann es ebenso dazu genutzt werden, den Einklang zwischen Eindringtiefe, Normalkraft und Kontaktradius (eines axialsymmetrischen Normalkontaktes) herzustellen. Vor einer numerischen Umsetzung würde selbstverständlich die Analogie zwischen ebenem Verzerrungszustand und ebenem Spannungszustand ausgenutzt werden. Angewandt auf den inkompressiblen linear-inhomogenen Halbraum im EVZ führt das auf eine linear-inhomogene Scheibe mit den folgenden elastischen Parametern:

$$\bar{m}_E := \left. \frac{m_E}{1 - \nu^2} \right|_{\nu=0.5} = \frac{4}{3} m_E \quad \bar{\nu} := \left. \frac{\nu}{1 - \nu} \right|_{\nu=0.5} = 1. \tag{4.15}$$

Der Bezug zu den elastischen Eigenschaften des realen (abzubildenden) Mediums gelingt durch einen Vergleich mit den Beziehungen (2.50) und (2.52), die für das eindimensionale System gelten. Die

⁵Diese wird entgegen einer normalen Federsteifigkeit in N/m^3 gemessen.

Anwendung eines zwei- statt eines eindimensionalen Modells wäre aber nur dann gerechtfertigt, wenn zusätzliche Vorteile bestehen. Solche sind in gewissem Maße vorhanden. Denken wir dazu an die eingangs des Kapitels 4.2 erwähnte *Äquivalenz der Spannungen im GIBSON- und homogenem Medium bei Normalbeanspruchung* des Halbraums; letztere – und das sieht man sehr schön an der Gleichungsfolge (2.88) – sind unabhängig von der Querdehnzahl! Die linear-inhomogene Scheibe mit den nach (4.15) angepassten Materialparametern liefert genau die gleichen Spannungsgrößen. Nach Anwendung des Korrespondenzprinzips (Tabellen 2.1 und 2.2) erhalten wir die eigentlich gesuchten Spannungen im axialsymmetrischen Kontakt. Exaktheit ist dabei aber nur für die von der Querkontraktion unbeeinflussten Komponenten σ_{zz} und τ_{rz} garantiert. σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ hingegen enthalten laut Tabelle 2.2 einen zusätzlichen von der (ebenen) Horizontalverschiebung u_x^p abhängigen Integralausdruck (σ_{rr}^{II} , $\sigma_{\varphi\varphi}^{II}$), welcher nicht den richtigen Input bekommt, da die Verschiebungen innerhalb des GIBSON-Körpers grundsätzlich verschieden von denen im homogenen Fall sind!⁶ Genau hierin liegt ein großer Nachteil gegenüber dem Reduktionsalgorithmus auf Seite 51, der zwar zwei unterschiedliche Ersatzmodelle benötigte (1D Federmodell und homogenes 2D Medium), jedoch den Kontakt bis ins Detail vollständig richtig wiedergab!

Der auf eine entsprechende linear-inhomogene Scheibe umgerechnete GIBSON-Körper allein kann als solches leider nicht alle Eigenschaften des axialsymmetrischen Normalkontaktes reproduzieren und ist aus diesem Grunde für dessen Reduktion meines Erachtens weniger gut geeignet als das anfangs dieser Arbeit besprochene Reduktionsmodell. Sowohl das Verhalten der Oberfläche als WINKLER-Bettung als auch die Tatsache, dass die Spannungen in seinem Inneren exakt denen im homogenen Halbraum sind, sprechen für mehr Potenzial. Gepaart mit der richtigen Idee kann das GIBSON-Medium sicherlich als nutzbringendes Werkzeug dienen. Ausgehend von dem in Kapitel 4 vorgestellten mathematischen Fundament möchte ich in dieser Hinsicht nachfolgend ein passendes Beispiel anfügen.

⁶Eine genauere Analyse des Unterschiedes könnte im Rahmen einer Näherungslösung von Bedeutung sein, denn die primären Anteile σ_{rr}^I und $\sigma_{\varphi\varphi}^I$ werden nach wie vor exakt abgebildet!

4.3 Abbildung des Tangentialkontaktes zwischen Kugel und elastischem Halbraum

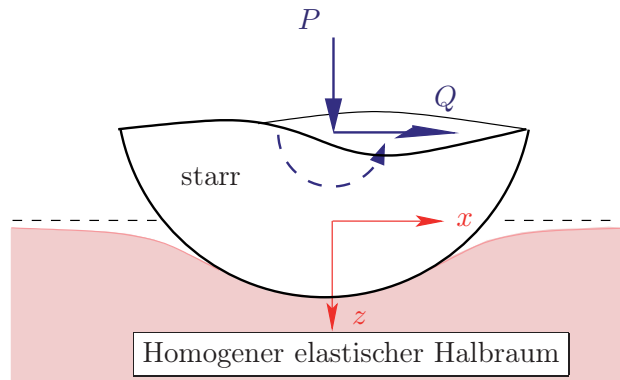


Abbildung 4.6: Tangentialkontakt zwischen einer starren Kugel und dem homogenen elastischen Halbraum

Betrachten wir nun das Kontaktproblem nach Abbildung 4.6, bei welchem eine starre Kugel zunächst durch eine Normalkraft P in einen elastischen Halbraum gedrückt und aufgrund einer anschließend aufgebrauchten Tangentialkraft Q um δ_x nach rechts verschoben wird.⁷ Einige für diesen dreidimensionalen Kontakt *charakteristische Beziehungen* mit Hilfe eines *2D-Graded-Materials* abzubilden, das soll die Aufgabe nachfolgender Abschnitte sein. Mitunter wird es – wie so häufig in der Mechanik – vorkommen, dass verschiedene Annahmen kollidieren, unser Interesse galt daher einem rein akademischen Beispiel!

4.3.1 Tangentialer Kugelkontakt mit partiellem Gleiten

Im weiteren erfolgt eine kurze Aufzählung der wesentlichen Zusammenhänge des Tangentialkontaktes einer starren Kugel auf dem elastischen Halbraum. Dabei wollen wir von der Annahme Gebrauch machen, dass die Normalspannungsverteilung $p(x)$ sowie der Kontaktradius a dem HERTZschen Normalkontakt genügen, was streng genommen nur für den Kontakt der undeformierbaren Kugel mit einem inkompressiblen elastischen Grundkörper ($\nu = 0.5$) korrekt ist⁸, da ansonsten auch die Tangentialspannungen jene mit beeinflussen würden. In analoger Weise ignorieren wir den Beitrag der normalen Oberflächenspannungen zu den Tangentialverschiebungen. Dass sich das Kontaktgebiet in einen inneren Haft- und einen äußeren Gleitbereich gliedert, ist elementar. Vollständiges Haften ist mit einer konstanten tangentialen Verschiebung aller Punkte innerhalb der Kontaktfläche verbunden. Die dazu erforderliche Verteilung von Tangentialspannungen strebt jedoch am Rande gegen unendlich, weshalb unter Beachtung der dort verschwindenden Normalspannungen die Haftungleichung $|\tau_{zx}(r)| \leq \mu |\sigma_{zz}(r)|$ bzw. $q(r) \leq \mu p(r)$ verletzt wird. In einem äußeren Ring muss demnach immer Mikrogleiten einsetzen; der relativen Bewegung entgegen wirken dort Tangentialspannungen nach dem COULOMBSchen Reibgesetz $q(r) = \mu p(r)$. Wir notieren die Randbedingungen:

⁷Genau genommen ist für die reine Translation ein zusätzliches Moment aufzubringen, das sich aus der Tangentialkraft Q multipliziert mit dem senkrechten Abstand ihrer Wirkungslinie vom Kontaktgebiet ergibt (in Abbildung 4.6 angedeutet)!

⁸Im allgemeinen muss für DUNDURS Konstante $\beta_D := \frac{1}{2} \left[\frac{(1-2\nu_1)/G_1 - (1-2\nu_2)/G_2}{(1-\nu_1)/G_1 + (1-\nu_2)/G_2} \right] \approx 0$ gelten, damit eine solche Entkopplung zulässig ist [53].

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_x(r) &= \text{const.} \\ q(r) &\leq \mu p(r) \end{aligned} \right\} \text{ für } 0 \leq r \leq c \quad (4.16)$$

$$q(r) = \mu p(r) \quad \text{für } c \leq r \leq a. \quad (4.17)$$

Die darin enthaltene Druckverteilung nach HERTZ $p(r)$ sowie deren Maximalwert p_o ergaben sich zu

$$p(r) = p_o \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad \text{mit } p_o = \frac{3P}{2\pi a^2}, \quad (4.18)$$

wobei an der Oberfläche des elastischen Grundkörpers die Beziehungen $\sigma_{zz}(x) = -p(x)$ und $\tau_{zx}(x) = -q(r)$ gelten. Die gesuchte Verteilung der Horizontalspannungen, welche obige Randbedingungen erfüllt, ergibt sich aus dem u.a. auf MINDLIN zurückgehenden Überlagerungsprinzip. In [71] führte er die Technik vor, bei der er zunächst die Verteilung nach Gleichung (4.17) über die gesamte Kontaktfläche ausdehnte – wie bei vollständigem Gleiten – und anschließend eine negative, nur im Haftbereich von Null verschiedene Verteilung derart addierte, dass die tangentielle Verschiebung dort nach (4.16) eine Konstante darstellt. So kam er auf

$$q(r) = \frac{3\mu P}{2\pi a^2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} - H \left(1 - \frac{r}{c}\right) \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{c}\right)^2} \right] \quad \text{für } 0 \leq r \leq a; \quad (4.19)$$

den noch unbekanntem Radius c des Haftgebietes bestimmte er aus dem tangentialen Kräftegleichgewicht und erhielt nach Umstellung

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{Q}{\mu P}\right)^{1/3}. \quad (4.20)$$

Die charakteristischen Ergebnisse nach Gleichungen (4.19) und (4.20) sind in Abbildung 4.7 graphisch veranschaulicht.

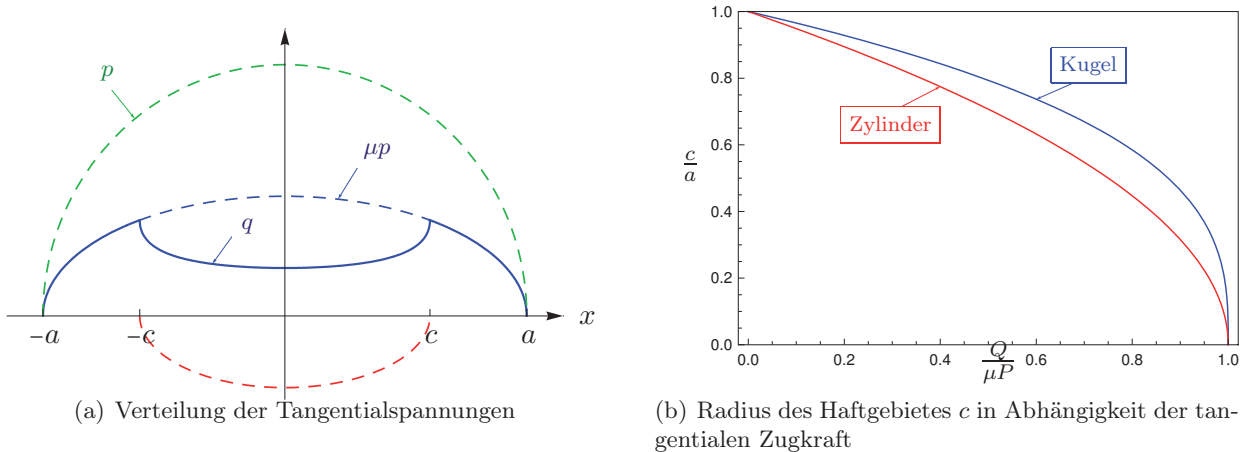


Abbildung 4.7: Zum kugelförmigen Tangentialkontakt unter Berücksichtigung des Schlupfes

4.3.2 Tangentialkontakt zwischen starrem Zylinder und GIBSON-Medium

Die erläuterte Technik von MINDLIN ist selbstverständlich auch für einen zylindrischen Kontakt anwendbar, unabhängig davon, ob wir einen starren Zylinder in einen homogenen oder inhomogenen

Grundkörper drücken. Im erstgenannten Fall gibt es u.a. markante Abweichungen im Verhalten der Haftkontakthalbbreite als Funktion der äußeren Zugkraft gegenüber dem axialsymmetrischen Pendant

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{Q}{\mu P}\right)^{1/2}, \quad (4.21)$$

welche rechterhand in Abbildung 4.7 ebenfalls skizziert sind. Unser Interesse soll nun dem inhomogenen Fall gelten. Dabei möchte ich zunächst weder eine Beschränkung auf Linearität noch auf Inkompressibilität tätigen. Der Grund dafür wird sich zu einem späteren Zeitpunkt herausstellen. Setzen wir die Gleichungen (E.10) und (E.11) in (E.8) ein, so erhalten wir die Radial- und Tangentialspannungen im Halbraum (EVZ) bei gleichzeitiger Wirkung einer Normal- und einer Tangentiallast (linienförmiger Kontakt). Für die Oberflächenverschiebungen gelten dann

$$\bar{u}_x(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \frac{1-\nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} \left[P \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sgn}(x) + Q \frac{\alpha+1}{\beta} \sin\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (4.22)$$

$$\bar{u}_z(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \frac{1-\nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} \left[P \frac{\beta}{1+\alpha} \sin\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) - Q \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sgn}(x) \right], \quad (4.23)$$

die wir zur Berechnung der Verschiebungen im Falle von verteilten Beanspruchungen $p(x)$ und $q(x)$ als Fundamentallösungen nutzen können:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(x) &= \overbrace{\frac{1-\nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \left[\int_{-a}^x \frac{p(s)}{(x-s)^\alpha} ds - \int_x^a \frac{p(s)}{(s-x)^\alpha} ds \right]} =: \{\bar{u}_x(x)\}_p \\ &\quad + \frac{1-\nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} \frac{\alpha+1}{\beta} \sin\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \int_{-a}^a \frac{q(s)}{|x-s|^\alpha} ds \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(x) &= \frac{1-\nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} \frac{\beta}{1+\alpha} \sin\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \int_{-a}^a \frac{p(s)}{|x-s|^\alpha} ds \\ &\quad - \underbrace{\frac{1-\nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \left[\int_{-a}^x \frac{q(s)}{(x-s)^\alpha} ds - \int_x^a \frac{q(s)}{(s-x)^\alpha} ds \right]} =: \{\bar{u}_z(x)\}_q. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die markierten Anteile $\{\bar{u}_x(x)\}_p$ und $\{\bar{u}_z(x)\}_q$ sollen analog der Vorgehensweise im homogenen Fall vernachlässigt werden, was streng genommen nur dann möglich ist, wenn für deren Vorfaktoren

$$\frac{1-\nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right) \approx 0 \quad (4.26)$$

gilt; die Koeffizienten der verbleibenden Integralausdrücke müssen gleichzeitig (deutlich) von Null verschieden sein!⁹

Mit diesen Annahmen liegt eine vollständige Entkopplung der Problemstellung vor, für welche der reibungsfreie Normalkontakt die Normalspannungen $p(x)$ und den Kontaktradius a bestimmt. Lösungen kann man z.B. in [34] finden; GIANNAKOPOULOS und PALLOT haben darin u.a. auch den

⁹Für $\alpha \rightarrow 1$ und $\nu \rightarrow 0.5$ ist zwar der Einfluss der Normalspannungen auf die Horizontalverschiebungen geringfügig, nicht aber der Einfluss der Schubspannungen auf die Normalverschiebungen!

hier vorliegenden Tangentialkontakt untersucht, allerdings unter ganz anderen Aspekten. Ihre Analysen verfolgen das Ziel, möglichst verschleißbeständige Oberflächen aus inhomogenen Materialien zu schaffen (*functionally graded materials*), während die vorliegende Arbeit Reduktionsprozesse behandelt! Die Autoren von [34] geben an:

$$p(x) = \frac{\Gamma(3+\alpha)}{2^{1+\alpha} \Gamma^2\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)} \frac{P}{2a} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (4.27)$$

$$a^{2+\alpha} = \frac{1-\nu^2}{m_E} \frac{2RP\beta(\alpha+2)}{(1-\alpha^2)\pi} \sin\left(\beta\frac{\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3+\alpha+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3+\alpha-\beta}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)} \quad (4.28)$$

$$\delta = \frac{a^2}{2R\alpha}. \quad (4.29)$$

Demnach steigt die Kontakthalbbreite a mit zunehmendem α und nimmt im Grenzfall einer linearen Inhomogenität für $0 \leq \nu < 0.5$ unendlich große Werte an. Nur für den *inkompressiblen* GIBSON-Körper erhalten wir mittels Grenzübergang wieder ein (in x -Richtung) finites Kontaktgebiet. Halbbreite und Druckverteilung eines solchen Mediums können wir sehr schnell prüfen, wenn wir seine Besonderheit – das Verhalten als WINKLERSche Bettung – ausnutzen. Setzen wir bei gegebener Normalkraft P eine quadratische Verschiebung an

$$\bar{u}_z(x) = \delta - \frac{x^2}{2R},$$

dann erhalten wir aus der Randbedingung $\bar{u}_z(a) \stackrel{!}{=} 0$ zunächst die Beziehung $a(\delta) = \sqrt{2R\delta}$ und aus Gleichung (4.14)

$$p(x) = k_W \bar{u}_z(x) = \frac{1}{3R} m_E (a^2 - x^2).$$

Die noch unbekannte Kontakthalbbreite kann aus dem globalen Kräftegleichgewicht berechnet werden

$$a(P) = \sqrt[3]{\frac{9RP}{4m_E}} \implies p(x) = \frac{3P}{4a} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right].$$

Obige Ergebnisse gehen auch aus (4.27) und (4.28) hervor.

Sei nun ebenfalls der Anteil der horizontalen Oberflächenverschiebungen $\{\bar{u}_x(x)\}_p$ am Gesamtmaß $\bar{u}_x(x)$ unwesentlich, kommt das wiederum einer Entkopplung gleich. Außerhalb des Haftbereichs müssen die Tangentialspannungen dem COULOMBSchen Reibgesetz genügen, sind daher bekannt:

$$q(x) = \mu p(x) = \underbrace{\mu \frac{m_E a^{1+\alpha}}{\pi(1-\nu^2)R} \frac{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{F_{\alpha\beta}\beta \sin\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)}}_{=:p_o(\alpha,\nu,a)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{für } c \leq |x| \leq a. \quad (4.30)$$

Im Sinne der angesprochenen Überlagerung denken wir uns nun die Tangentialspannungen (4.30) über die gesamte Kontaktfläche hinfortgesetzt wirkend – wir bezeichnen sie mit $q^I(x)$ – und überlagern diese mit einer Verteilung *vom gleichen Typ* $q^{II}(x)$, welche nur innerhalb des Haftgebietes anliegt. Die Addition der induzierten Horizontalverschiebungsanteile soll dabei für $|x| \leq c$ eine Konstante liefern (Kinematischer Zwang entsprechend (4.16)). Durch die angenommene vollständige Entkopplung des Problems führt ein Vergleich von (4.24) mit (4.25) auf den Zusammenhang

$$\frac{\{\bar{u}_x(x)\}_q}{q_o} = \frac{\{\bar{u}_z(x)\}_p}{p_o} \cdot \left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right)^2, \quad (4.31)$$

den wir sofort ausnutzen können, da wir die Normalverschiebung $\bar{u}_z(x)$, welche durch eine reine Normaldruckverteilung vom Typ (4.27) hervorgerufen wird, kennen:¹⁰

$$q^I(x) = \mu p_o(a) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} \longrightarrow \bar{u}_x^I(x) = \mu \frac{1}{2R} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 - x^2 \right] \left(\frac{1+\alpha}{\beta} \right)^2 \text{ für } |x| \leq a \quad (4.32)$$

$$q^{II}(x) = q_o^{II}(c) \left[1 - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} \longrightarrow \bar{u}_x^{II}(x) = \lambda \frac{1}{2R} \left[\left(\frac{c}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 - x^2 \right] \left(\frac{1+\alpha}{\beta} \right)^2 \text{ für } |x| \leq c \quad (4.33)$$

Die noch freie Konstante λ muss nun derart ermittelt werden, dass nach Superposition die quadratischen Terme in \bar{u}_x verschwinden. Wir erhalten $\lambda = -\mu$, sind aber noch nicht am Ende angelangt, da auch $q_o^{II}(c)$ zu finden ist. Dazu gebrauchen wir abermals (4.31) und bekommen

$$q_o^{II}(c) = -\mu p_o(\alpha, \nu, c). \quad (4.34)$$

Darin darf $p_o(\alpha, \nu, c)$ nicht mit dem in Gleichung (4.30) markierten realen Maximaldruck $p_o(\alpha, \nu, a) = p_o(a)$ verwechselt werden, der von der Kontakthalbbreite a abhängig ist. Erst durch Ersetzen von a durch c ist jener bestimmt, so dass letztlich gilt:

$$q^{II}(x) = -\mu \left(\frac{c}{a} \right)^{1+\alpha} p_o(a) \left[1 - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} \text{ für } |x| \leq c. \quad (4.35)$$

Die Überlagerung der beiden Anteile zur Tangentialspannungsverteilung innerhalb des Kontaktgebietes zeigt Abbildung 4.8 für verschiedene Werte des Exponenten der Inhomogenität und einem angenommenen Verhältnis von $c/a = 0.6$. Zu beachten ist die jeweilige Normierung, denn der Kontaktradius a nimmt mit steigendem α zu, während der Maximaldruck p_o indessen fällt. Interessanterweise heben sich für das linear-inhomogene Medium ($\alpha = 1$) die quadratischen *Spannungs*-Anteile innerhalb des Haftgebietes heraus, so dass hier die konstante Schubspannungsverteilung

$$q(x) = \mu p_o \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right] = \text{const. für } |x| \leq c \quad (4.36)$$

verbleibt (roter Graph).

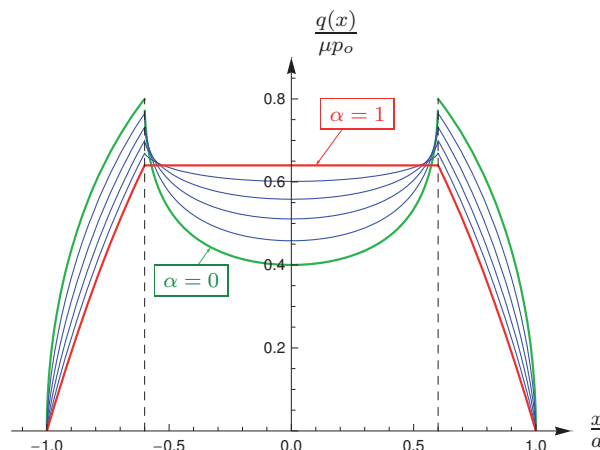


Abbildung 4.8: Normierte Tangentialspannungen beim Kontakt eines starren Zylinders mit einem inhomogenen Grundkörper; skizziert ist der Fall des partiellen Gleitens für verschiedene Exponenten α .

¹⁰In (4.31) wurden Verteilungen vom gleichen Typ $q(x) \sim p(x)$ vorausgesetzt!

Die konstante Verschiebung aller Punkte innerhalb des Haftgebietes ergibt sich zu

$$\delta_x = \frac{\mu}{2R\alpha} (a^2 - c^2) \left(\frac{1 + \alpha}{\beta} \right)^2 ; \quad (4.37)$$

die noch unbekannte Haftkontakthalbbreite c können wir mittels Integration der Tangentialspannungen über die Kontaktfläche als Funktion der eingprägten Lasten P und Q darstellen:

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{-a}^a q^I(x) dx + \int_{-c}^c q^{II}(x) dx \\ &= \mu \int_{-a}^a p_o(a) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} dx - \mu \left(\frac{c}{a} \right)^{1+\alpha} \int_{-c}^c p_o(a) \left[1 - \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} dx \\ &= \mu \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^{2+\alpha} \right] \underbrace{\int_{-a}^a p_o(a) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} dx}_{=: P} \\ \implies \frac{c}{a} &= \left(1 - \frac{Q}{\mu P} \right)^{\frac{1}{2+\alpha}} . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Auf das Ergebnis (4.38) haben wir hingearbeitet, denn wenn wir $\alpha = 1$ setzen, ergibt sich das entsprechende Verhältnis der Kontaktradien für den vorab diskutierten *Tangentialkontakt zweier Kugeln* nach (4.20), d.h. :

Der Quotient aus Haft- und Gesamtkontakthalbbreite c/a für den (2D-) Tangentialkontakt zwischen einem starren Zylinder und einem linear-inhomogenen elastischen Grundkörper ist identisch mit dem der Kontaktradien des (3D-) tangentialen Kontaktes einer starren Kugel auf einem homogenen elastischen Halbraum!

Durch Einsetzen von (4.38) in (4.37) kann noch ein Zusammenhang zwischen Horizontalverschiebung δ_x und Eindrücktiefe δ_z aufgestellt werden

$$\delta_x = \mu \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \nu - \alpha\nu} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{Q}{\mu P} \right)^{\frac{2}{2+\alpha}} \right] \delta_z . \quad (4.39)$$

Die Eindrücktiefe im linear-inhomogenen Medium ($\alpha = 1$) ergab nur bei zusätzlicher Annahme von Inkompressibilität ($\nu = 0.5$) einen endlichen Wert, die Horizontalverschiebung strebt aufgrund des Vorfaktors dennoch gegen unendlich, weshalb die Angabe einer Steifigkeit für den Tangentialkontakt ausbleiben muss. Ganz interessant ist dabei der Fakt, dass sich außerhalb des Kontaktgebietes eine endliche (logarithmische) Horizontalverschiebung einstellt, innerhalb jedoch eine Unbestimmtheit existiert. Diese kann daher auch nicht durch den im homogenen, ebenen Fall üblichen Bezug auf die Verschiebung eines Fixpunktes der Momentankonfiguration eliminiert werden; ein solches Ergebnis liegt bereits bei konstanter Beanspruchung vor [112].

Mit Gleichung (4.38) für $\alpha = 1$ ist selbstverständlich nur ein einziges *dreidimensionales* Ergebnis mit Mitteln der *Dimensionsreduktion* gewonnen; die Verteilung der Feldgrößen weichen in beiden

Fällen erheblich voneinander ab. Dennoch zeigt dieses Beispiel, welches Potenzial die *Reduktionsmethode* birgt, wenn man nur die entsprechende Idee daran koppelt – hier stand diesbezüglich die Untersuchung eines ebenen Kontinuums mit tiefenabhängigem E -Modul im Vordergrund; die Besonderheiten einer linearen Inhomogenität brachten zusätzliche Vereinfachungen (z.B. Verhalten als WINKLER-Bettung). Der Rollkontakt eines starren Zylinders auf einem solchen zweidimensionalen Medium bildet den Rollkontakt einer Kugel auf einem homogenen elastischen Halbraum hinsichtlich des Verhältnisses von Haft- und Gleitgebiet ebenfalls korrekt ab.¹¹

¹¹Der Beweis unter Berücksichtigung der veränderten Randbedingungen geschieht völlig analog der obigen Vorgehensweise!

Kapitel 5

Isotropie elastischer Gittermodelle

In Kapitel 2.4 wurden mit dem *Korrespondenzprinzip* die notwendigen analytischen Beziehungen hergeleitet, die eine exakte Umrechnung planarer in axialsymmetrische Felder ermöglichen. Die Ankopplung an das eindimensionale Federmodell war sehr einfach, da dessen (fiktive) Federkräfte gerade die Randlasten darstellten, welche einem *ebenen System* aufzuprägen sind. Für den Kontakt ohne und mit Adhäsion konnte die Korrektheit dieser Erweiterung der Dimensionsreduktionsmethode anhand verschiedener Beispielrechnungen bestärkt werden. Zur Berechnung der zunächst fiktiven Spannungen und Verschiebungen im Inneren des zweidimensionalen Mediums wurde dabei die *Fourierintegration* herangezogen, die notwendigen Integrale mit MATHEMATICA gelöst. Wie bereits erwähnt, ist dieser Schritt aber an keinerlei Lösungsverfahren gebunden und damit der gesamte Reduktionsalgorithmus eine Bereicherung verschiedener kommerzieller Programmpakete. Bei der Nutzung von diskreten Lösungsmethoden ist darauf zu achten, dass sie das zweidimensionale, isotrope, linear-elastische Kontinuum möglichst genau abbilden. Sie dienen quasi nur als Mittel zur Bestimmung von Zwischenergebnissen, die erst nach anschließender ABEL-Transformation auf die Endresultate führen – Spannungen und Verschiebungen im axialsymmetrisch beanspruchten Halbraum. Ohne auf die Vor- und Nachteile einzelner numerischer Berechnungsverfahren (FEM, BEM, FDM, MCA, LSM, etc.) näher einzugehen, möchte ich nachfolgend anhand elastischer Gittermodelle (*lattice-spring-model*, *elastic-lattice-model*) verschiedene Abbildungsmöglichkeiten diskutieren.

Aus historischer Sicht muss die Arbeit von HRENNIKOFF [47] genannt werden, der Flächentragwerke durch gleichwertige Stabwerksysteme ersetzte und damit die sogenannte *Gitterrostmethode* entscheidend vorantrieb. Tauschen wir nun die Stäbe des Fachwerks durch masselose Federn aus und konzentrieren die Masse anteilig an den reibungsfreien Gelenken, liegt bereits ein elastisches Gittermodell vor, welches das Verhalten des kontinuierlichen Systems abbildet, dabei aber nur endlich viele Freiheitsgrade besitzt. Deren Anzahl ist je nach Problemstellung geeignet zu wählen. Bei genügend kleinem Knotenabstand können wir die Massenpunkte auch als miteinander wechselwirkende Atome interpretieren. Gittermodelle eignen sich grundsätzlich zur Abbildung von Prozessen auf verschiedenen Skalen und werden besonders häufig zur Simulation des bruchmechanischen Verhaltens (Rissentstehung und -ausbreitung einschließlich akustischer Emission) genutzt [102, 43, 80, 127]. Materialdefekte oder Heterogenitäten können sehr einfach eingebaut werden. In einer jüngst erschienenen Arbeit wurden sie zur Analyse von Wellenphänomenen an real-diskreten und kontinuierlichen Strukturen genutzt [44].

Unter anderem sind es materielle Symmetrien, die die Wahl einer zweckmäßigen Gittergeometrie unterstützen. Einen Überblick über die unterschiedlichen Strukturen, die in der Mikromechanik zur Anwendung kommen, gibt OSTAJA-STARZEWSKI [79]. Im gegenwärtigen Kapitel geht es um die Modellierung *isotroper Materialien*.

5.1 Klassifizierung ebener, elastischer Systeme

Mehrfach wurde in dieser Arbeit von *ebenen Systemen* gesprochen. Gemeint waren dabei zumeist dreidimensionale elastische Körper im *ebenen Spannungszustand* oder *ebenen Verzerrungszustand*. Dass diese Fälle nicht gesondert betrachtet werden müssen, ist elementar. Es bedarf lediglich einer Neuformulierung der elastischen Parameter (siehe Abbildung 2.8 auf Seite 26), die jeweils nach Anpassung des HOOKEschen Gesetzes in LAMÉscher Fassung

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5.1)$$

an einen einfachen Zug- und Scherversuch aus einem Koeffizientenvergleich hervorgeht. Für die spätere Bestimmung der Steifigkeiten des elastischen Gitters ist eine Umrechnung der elastischen Parameter nützlich und im folgenden tabellarisch aufgeführt:

Zustand	$E(\lambda, \mu)$	$\nu(\lambda, \mu)$	$G(\lambda, \mu)$	$\lambda(E, \nu)$	$\mu(E, \nu)$
EVZ	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	μ	$\frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$
ESZ / EZ	$\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$	$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$	μ	$\frac{\nu E}{1 - \nu^2}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$

Tabelle 5.1: Relationen zwischen den elastischen Parametern im Falle des ebenen Verzerrungs- (EVZ) bzw. ebenen Spannungszustandes (ESZ); EZ bezeichnet ein ebenes System ohne z-Richtung.

Ein *zweidimensionales linear elastisches Kontinuum* kann aber auch als eines *ohne 3- bzw. z-Richtung* interpretiert werden, also als ein tatsächlich ebenes System (abgek. EZ). Genau ein solches wird in erster Linie das Gittermodell abbilden. Ignorieren wir in (5.1) die z-Komponenten, so erhalten wir nach der erwähnten Anpassung einen dritten Satz elastischer Koeffizienten, der sich als identisch mit jenem im ebenen Spannungszustand erweist! Lediglich beim sogenannten Kompressionsmodul K ist eine Unterscheidung zu treffen, da er im dreidimensionalen einen *Volumen-*, im zweidimensionalen aber nur einen *Flächenelastizitätsmodul* darstellt. Aus einer jeweiligen hydrostatischen Beanspruchung ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_{2D} &= \lambda + \mu = \frac{E}{2(1 - \nu)} \\ K_{3D} &= \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

An dieser Stelle soll noch eine weitere Form des HOOKEschen Gesetzes notiert werden, bei welcher der isotrope Elastizitätstensor 4.Stufe die lineare Abbildung zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor vermittelt

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{mit} \quad E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (5.3)$$

Die besondere Gestalt der Steifigkeitstetrade als Kombination aus Produkten der KRONECKER- δ 2.Stufe ist das Resultat der Invarianz gegenüber beliebigen orthogonalen Transformationen (Drehungen, Spiegelungen); zudem wurde die Symmetrie des Deformators berücksichtigt, weshalb nur noch 2 Materialkonstanten verbleiben.

Die spezifische Formänderungsenergie U_{el}^s lässt sich als *homogene quadratische Form* in den Verzerrungen schreiben, wenn man (5.3) definitionsgemäß integriert:

$$U_{el}^s := \int_{(\mathbf{D})} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \underbrace{\frac{K}{2} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj}}_{=: U_K^s} + \underbrace{\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}_{=: U_G^s}. \quad (5.4)$$

Der letzte Ausdruck in Gleichung (5.4) kennzeichnet die Zerlegung in einen Kompressions- U_K^s und einen Gestaltänderungsanteil¹ U_G^s , die in Verbindung mit der zusätzlichen Forderung nach *positiver Definitheit* direkt auf die Stabilitätsbedingungen

$$K > 0 \quad \wedge \quad \mu > 0 \quad (5.5)$$

führt. Unter Beachtung von (5.2) ergeben sich für zwei- bzw. dreidimensionale, isotrope Elastizität die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \text{2D: } K_{2D} > 0 \quad \wedge \quad \mu > 0 &\iff E > 0 \quad \wedge \quad -1 < \nu < 1 \\ \text{3D: } K_{3D} > 0 \quad \wedge \quad \mu > 0 &\iff E > 0 \quad \wedge \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2 Quadratisches Gitter und Isotropie

In diesem Abschnitt werden nun verschiedene Gittermodelle untersucht. Der Unterschied liegt dabei nicht in der Gittergeometrie, sondern in der Art der gewählten Wechselwirkungen. Alle Modelle sollen ein quadratisches Grundgitter besitzen und es gilt, jenes im Sinne einer adäquaten Abbildung des zweidimensionalen, linear elastischen, isotropen Kontinuums mit zwei unabhängigen elastischen Konstanten (z.B. E und ν) anzupassen. Die Kenntnis darüber, dass ein quadratisches Gitter mit zentralen Wechselwirkungen zu nur ersten Nachbarn nicht isotrop ist, wird vorausgesetzt.

5.2.1 Zentrale Wechselwirkungen zu ersten und zweiten Nachbarn

Betrachten wir zunächst das quadratische Gitter in der Abbildung 5.1, bei welchem die benachbarten Massenpunkte durch einfache Längsfedern miteinander verbunden sind. Zur Nachbarschaft zählen dabei erste und auch zweite Nachbarn. Die Einheitsvektoren in Richtung des Gitters in der spannungslosen Referenzkonfiguration werden mit \mathbf{e}^α abgekürzt, der Index α ($\alpha \in \{1, \dots, 8\}$) nummeriert die Bindungen. Die Längssteifigkeit der horizontalen und vertikalen Federn sei mit k , die der Diagonalfedern mit k_D abgekürzt.

¹ ε_{ij}° gibt die Koordinaten des deviatorischen Anteils von \mathbf{D} an.

Kartesische Koordinaten der Gittereinheitsvektoren:

α	1	2	3	4
e_i^α	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
α	5	6	7	8
$\sqrt{2} e_i^\alpha$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

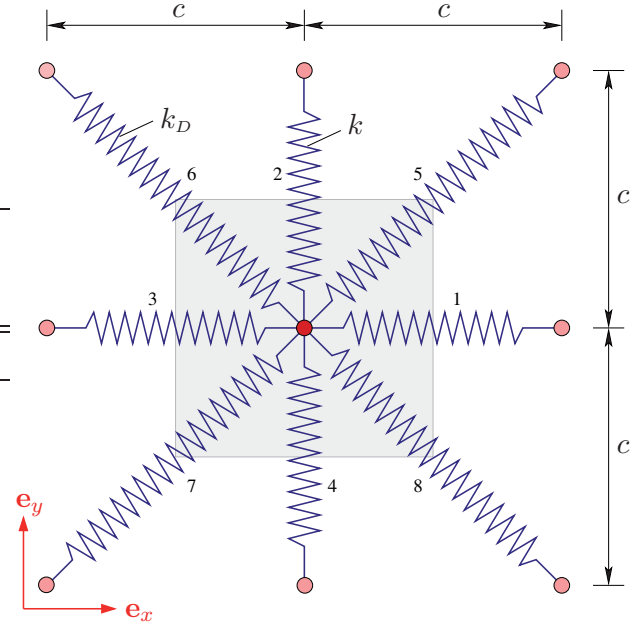


Abbildung 5.1: Quadratischer Gitterbaustein mit zentralen Wechselwirkungen zu ersten und zweiten Nachbarn inklusive Gittereinheitsvektoren.

Die Längenänderungen der Federn werden näherungsweise mit der Projektionsmethode berechnet, d.h. die Verschiebungsdifferenzvektoren zweier benachbarter Massenpunkte auf die Ausgangsrichtung des Gitters projiziert, die (nach Theorie 1.Ordnung) zugleich die Wirkungsrichtung der Kraft darstellt:

$$\Delta \ell^\alpha = [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{e}^\alpha. \quad (5.7)$$

Die materiellen Koordinaten² des betrachteten zentralen Knotens wurden darin mit \mathbf{X} abgekürzt, der Verbindungsvektor zu einem Nachbar in der Ausgangslage mit \mathbf{c}^α . Aus der Entwicklung von $\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha)$ in eine TAYLOR-Reihe *nur bis 1.Ordnung* ergibt sich

$$\Delta \ell^\alpha \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} c^\alpha e_j^\alpha e_i^\alpha = \varepsilon_{ij} c^\alpha e_j^\alpha e_i^\alpha, \quad (5.8)$$

die letztgenannte Form enthält die Komponenten des Deformators. Im nächsten Schritt wird nun die spezifische elastische Energie aufgestellt, zu der die einzelnen Federpotenziale je zur Hälfte beitragen³. Wie in Abbildung 5.1 zu erkennen, kann jedem inneren Knoten eine Fläche $A = c^2$ bzw. bei Annahme einer gleichmäßigen Dicke t ein Volumen $V = c^2 t$ anteilig zugeordnet werden. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} U_{el}^s &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2V} \left[\sum_{\alpha=1}^4 k (\Delta \ell^\alpha)^2 + \sum_{\alpha=5}^8 k_D (\Delta \ell^\alpha)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4c^2 t} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \left(c^2 k \sum_{\alpha=1}^4 e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha + 2c^2 k_D \sum_{\alpha=5}^8 e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

²Aufgrund der geometrischen Linearisierung wird auf die Unterscheidung materieller und räumlicher Koordinaten bis auf weiteres verzichtet; das Hinzufügen einer Zeitvariable t im Argument der Verschiebungen im Falle der Kinetik ist selbstverständlich.

³Die andere Hälfte gehört dem jeweiligen Nachbarknoten!

Für die Gittermomente 4. Grades gilt

$$\sum_{\alpha=1}^4 e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha = 2\delta_{ijkl} \quad (5.10)$$

$$\sum_{\alpha=5}^8 e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha = (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\delta_{ijkl}, \quad (5.11)$$

wobei δ_{ijkl} nicht die Einheitsmatrix 4. Stufe, sondern ein verallgemeinertes KRONECKER- δ 4. Stufe bedeutet, welches nur bei Gleichheit aller Indizes den Wert 1 ansonsten den Wert 0 annimmt; es ist *nicht isotrop!* Einsetzen von (5.10) und (5.11) in (5.9) liefert

$$U_{el}^s = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \underbrace{\frac{1}{t} [(k - 2k_D)\delta_{ijkl} + k_D(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]}_{=: L_{ijkl}} \varepsilon_{kl}. \quad (5.12)$$

Der Gittertensor 4. Stufe mit den Koordinaten L_{ijkl} ist aufgrund des verallgemeinerten KRONECKER- δ noch nicht isotrop. Erst durch die Forderung

$$k - 2k_D = 0 \implies L_{ijkl} = \frac{k_D}{t} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (5.13)$$

genügt er diesen Ansprüchen. Bei der Anpassung der Federsteifigkeiten an die elastischen Parameter des Kontinuums nutzen wir die Äquivalenz der Formänderungsenergiedichte aus.⁴ Dies mündet in einen Koeffizientenvergleich der Koordinaten des Gittertensors mit denen des isotropen Elastizitätstensors 4. Stufe aus Gleichung (5.3), durch welchen ein wesentlicher Nachteil unseres Gitters ersichtlich wird:

$$\lambda = \mu = \frac{k}{2t} \implies \text{2D: } E = \frac{4k}{3t} \quad \wedge \quad \nu = \frac{1}{3} \quad \text{bzw.} \quad \text{3D: } E = \frac{5k}{4t} \quad \wedge \quad \nu = \frac{1}{4}. \quad (5.14)$$

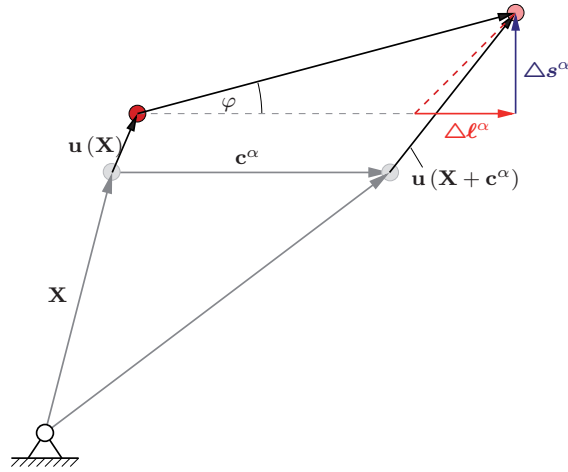
Die LAMÉkonstanten λ und μ sind *nicht unabhängig* voneinander, weshalb mit dem untersuchten Gitter nur linear elastische, isotrope, zweidimensionale Kontinua mit einer POISSONZahl von $\nu = \frac{1}{3}$ abgebildet werden können!

Am Rande noch eine Anmerkung: Es ist bekannt, dass das hexagonale Gitter bereits durch die sechs zentralen Wechselwirkungen zu den ersten Nachbarn isotrop ist. Vorschnell ist aber der Schluss, man könne durch die Hinzunahme von zentralen Wechselwirkungen zu den zweiten Nachbarn eine Variierbarkeit der Querkontraktion erreichen. Bei genauerer Betrachtung wird man feststellen, dass sich nichts an der Abhängigkeit der LAMÉ-Koeffizienten ändert!

5.2.2 BORN-Modell mit unabhängigen elastischen Parametern

Die obigen Berechnungen haben gezeigt, dass eine Erweiterung des Modells nötig ist, um zwei unabhängige elastische Parameter zu realisieren. Dazu sollen zusätzliche Federn – ich möchte sie *Schubfedern* nennen – zum Einsatz kommen. Die damit verbundene Wechselwirkung geht aus Abbildung 5.2 hervor.

⁴In [100] wird eine alternative Möglichkeit der Anpassung vorgestellt, die auf die Impulsbilanz zurückgeht.



Kinematik:

$$\Delta \ell^\alpha = [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\alpha$$

$$\Delta \mathbf{s}^\alpha = [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\alpha)$$

Abbildung 5.2: Zur Projektion $\Delta \ell^\alpha$ und Orthogonalprojektion $\Delta \mathbf{s}^\alpha$ des Verschiebungsdifferenzvektors

Die übliche Projektionskraft zwischen zwei benachbarten Knoten wird nun durch einen dazu orthogonalen Anteil proportional zu $\Delta \mathbf{s}^\alpha$ ergänzt. Der Einfachheit halber werden nur für die vier Diagonallbindungen solche Wechselwirkungen angesetzt. Zur Anpassung der Steifigkeiten soll anstelle der Äquivalenz der Verformungsenergie diesmal ein Grenzübergang auf die Zentralgleichung der Elastokinetik verhelfen. Dazu ist unter Berücksichtigung einer unendlich kleinen Maschenweite das 2.NEWTONSche Grundgesetz am diskreten Modell auszuwerten. Die Gesamtkraft auf das Teilchen mit den materiellen Koordinaten \mathbf{X} ergibt sich mittels Summation über alle umliegenden Federn

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=1}^4 k \Delta \ell^\alpha + \sum_{\alpha=5}^8 (k_D \Delta \ell^\alpha + k_s \Delta \mathbf{s}^\alpha), \quad (5.15)$$

die kinematischen Beziehungen aus Abbildung 5.2 eingesetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{X}) &= \sum_{\alpha=1}^4 k [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\alpha + \sum_{\alpha=5}^8 (k_D - k_s) [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\alpha \\ &+ \sum_{\alpha=5}^8 k_s [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{X})]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Reichte bei der Potenzialgegenüberstellung noch eine TAYLOR-Entwicklung 1.Ordnung für die Verschiebungen aus, müssen diesmal auch Glieder 2.Ordnung in c hinzugenommen werden:

$$u_i(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - u_i(\mathbf{X}) \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} c^\alpha e_j^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} (c^\alpha)^2 e_j^\alpha e_k^\alpha. \quad (5.17)$$

Unter Beachtung der verschwindenden *ungeraden* Gittermomente verbleibt damit für die kartesischen Koordinaten der Resultierenden

$$\begin{aligned} F_l(\mathbf{X}) &= \frac{k}{2} c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{\alpha=1}^4 e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha + (k_D - k_s) c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{\alpha=5}^8 e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha \\ &+ k_s c^2 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \underbrace{\sum_{\alpha=5}^8 e_j^\alpha e_k^\alpha}_{= 2\delta_{jk}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Gittermomente 4.Grades sind mit (5.10) und (5.11) bekannt; im Gleichgewicht muss die Resultierende Null sein, während sie in der Kinetik der Impulsänderung des Massenpunktes entspricht (Man beachte Fußnote 2 auf Seite 86.). In letzterem Fall gilt dann wiederum mit Bezug auf das anteilige Volumen

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{k}{t} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{t} \left(\frac{k}{2} + 2k_s \right) \Delta \mathbf{u}, \quad (5.19)$$

was an eine zusätzliche *Isotropieforderung* geknüpft ist, die das verallgemeinerte KRONECKER- δ vierter Stufe eliminiert:

$$k = 2(k_D - k_s). \quad (5.20)$$

Abschließender Koeffizientenvergleich mit der LAMÉ-NAVIERschen Verschiebungsdifferentialgleichung

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (5.21)$$

bestimmt die Konstanten zu

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda t = \frac{k}{2} - 2k_s & \frac{k}{t} = \lambda + \mu \\ \mu t = \frac{k}{2} + 2k_s & \frac{k_D}{t} = \frac{\lambda + 3\mu}{4} \\ k = 2(k_D - k_s) & \frac{k_s}{t} = \frac{\mu - \lambda}{4} \end{array} \right| \begin{array}{ll} \mathbf{2D} & \mathbf{3D} \\ E = \frac{4k}{t} \frac{k + 4k_s}{3k + 4k_s} & \frac{k}{4t} \left(1 + 4 \frac{k_s}{k} \right) \left(5 - 4 \frac{k_s}{k} \right) \\ \nu = \frac{k - 4k_s}{3k + 4k_s} & \frac{1}{4} - \frac{k_s}{k} \end{array}.$$

Setzt man die Schubsteifigkeit k_s gleich Null, so gehen die Koeffizienten und die Isotropieforderung wie erwartet in jene des vorab behandelten Modells über. Der Vorteil des neuen Ansatzes liegt in den zwei unabhängigen elastischen Parametern. Dennoch beinhaltet er einen entscheidenden Nachteil, der auf dem geführten Weg quasi umschiffen wurde. Sichtbar wird er, wenn man die Formänderungsenergie dichte des Gitters aufstellt

$$U_{el}^s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2V} \left[\sum_{\alpha=1}^4 k (\Delta \ell^\alpha)^2 + \sum_{\alpha=5}^8 k_D (\Delta \ell^\alpha)^2 \right] + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2V} \sum_{\alpha=5}^8 k_s (\Delta s^\alpha)^2}_{\text{nicht rotationsinvariant!}}. \quad (5.22)$$

Starrkörperbewegungen dürfen die Formänderungsenergie nicht beeinflussen. Auch unter Berücksichtigung kleiner Verzerrungen (Verschiebungen) ist der zusätzliche energetische Schubanteil *nicht invariant gegenüber infinitesimalen Starrkörperrotationen*, was für die Resultierende noch der Fall war. Die Begründung dafür liegt allerdings in der *Summation* über die Bindungen, denn in jeder einzelnen Schubfeder wird sich die Kraft durch die Drehung ändern. Auf die strengere energetische Forderung machte KEATING in der Kristallelastizität aufmerksam [57, 58]. Der Schubfederanteil kann alternativ auch als harmonisches Drehfederpotenzial der aktuellen Bindungs- gegenüber ihrer Referenzrichtung interpretiert werden. Ferner ist mit Hilfe der kinematischen Beziehungen aus Abbildung 5.2 sehr leicht nachweisbar, dass die Energiedichte nach Gleichung (5.22) zu einem sogenannten BORN-Modell [10] gehört.

Mit Verzicht auf die langweilige Zwischenrechnung gebe ich hier nur das Ergebnis der Auswertung von (5.22) bekannt

$$U_{el}^s = \frac{c^2}{2V} [(k_D - k_s) \varepsilon_{jj} \varepsilon_{kk} + (k_D + k_s) \varepsilon_{kj} \varepsilon_{kj} + (k_D - k_s) \varepsilon_{kj} \varepsilon_{jk} + k_s (\omega_{kj} \omega_{kj} - \omega_{kj} \omega_{jk})], \quad (5.23)$$

das neben dem symmetrischen erwartungsgemäß nun ebenso den (ungewollten) antimetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten (infinitesimaler Drehtensor) enthält. Die Isotropiebedingung (5.20) fällt in der Zwischenrechnung ab; von ihr wurde in (5.23) bereits Gebrauch gemacht. Der Spannungstensor setzt sich demnach ebenso aus einem symmetrischen und einem antimetrischen Anteil zusammen⁵, seine Koordinaten lassen sich gemäß

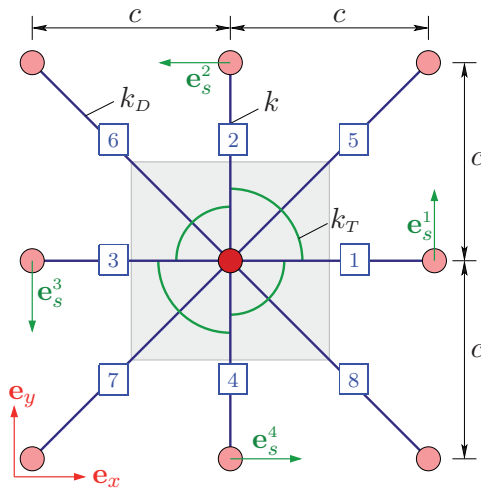
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_{el}^s}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U_{el}^s}{\partial \omega_{ij}} \quad (5.24)$$

berechnen. Anschließende Auswertung der differentiellen Impulsbilanz unterstreicht die Richtigkeit von (5.19).

Wohlwissend des nicht rotationsinvarianten Potenzials werden BORN-Modelle gerade wegen ihrer simplen Implementierung dennoch zu Simulationszwecken genutzt und liefern zum Teil sehr gute Ergebnisse [43, 20, 80, 19, 110]. Auch in modernen Verfahren zur Simulation von elastoplastischen Verformungen und Reibungsprozessen kommen sie zum Einsatz [92].

5.2.3 Rotationsinvariantes Modell

Zu einem elastischen Gitter, dessen gespeicherte Energie gegenüber infinitesimalen Rotationen invariant ist, gelangt man beispielsweise durch den Einbau von Drehfedern *zwischen benachbarten Bindungen*. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zum BORN-Modell, bei welchem die Torsionsfedern an die Referenzlage gekoppelt waren. Solche Modelle, die neben Längs- auch über derartige Drehsteifigkeiten verfügen, sind häufig nach KIRKWOOD benannt, da er eines (in eindimensionaler Form) zur Analyse der Schwingungen von Kettenmolekülen gebrauchte [60]. Erweiterte planare hexagonale und quadratische Gitter untersuchten MONETTE und ANDERSON auf ihre elastischen und Brucheigenschaften [72]. In deren Arbeit ist der Weg vom KIRKWOOD-Potenzial bei angenommenen kleinen Verschiebungen bis hin zum funktionalen Zusammenhang zwischen Steifigkeiten und LAMÉ-Konstanten erläutert. Im Gegensatz zu ihrem quadratischen Modell, werden beim nachstehenden nur Drehfedern zwischen den Bindungen zu den ersten Nachbarn eingefügt (also nur *vier* anstelle von *acht*).



Orthogonale Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_s^\alpha &= \mathbf{Q}^{\pi/2} \cdot \mathbf{e}^\alpha = (\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + \mathbf{I} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}^\alpha \\ \text{bzw.} \\ e_{si}^\alpha &= \epsilon_{izk} e_k^\alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_s^0 = \mathbf{e}_s^4 \end{aligned}$$

Abbildung 5.3: KIRKWOOD-Modell: Quadratisches Gitter mit zentralen Wechselwirkungen zu ersten und zweiten Nachbarn (Steifigkeiten k , k_D) sowie Drehfedern zwischen benachbarten Bindungen zu den ersten Nachbarn (Drehfedersteifigkeit k_T).

⁵Die für das klassische Kontinuum aus dem Momentengleichgewicht resultierende Symmetrie des Spannungstensors ist demnach hier nicht erfüllt!

Die Torsionsfedern in Abbildung 5.3 haben die Steifigkeit k_T ; sie kann über die vorher eingeführte Schubsteifigkeit k_s gemäß $k_T = k_s c^2$ ausgedrückt werden. Die Formänderungsenergiedichte setzt sich nun aus dem bekannten *Zwei-Körper-Potenzial* nach (5.9) (es wird vorübergehend mit U_I^s abgekürzt) und einem zusätzlichen *Drei-Körper-Potenzial* U_{II}^s zusammen

$$U_{II}^s = \frac{1}{2V} \sum_{\alpha=1}^4 k_s \left\{ [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{e}_s^\alpha - [\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^{\alpha-1}) - \mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{e}_s^{\alpha-1} \right\}^2; \quad (5.25)$$

die Einheitsvektoren \mathbf{e}_s^α verlaufen senkrecht zu den Gittereinheitsvektoren \mathbf{e}^α . Sie gehen demnach aus einer Drehung um $\pi/2$ aus ihnen hervor, d.h. ihre skalarwertigen Komponenten sind über das Permutationssymbol ϵ_{izj} miteinander verknüpft.⁶ Wiederum werden die Verschiebungen bis zur ersten Ordnung entwickelt, zudem Gebrauch von der allgemein bekannten Beziehung

$$\epsilon_{izk}\epsilon_{jzm} := \delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj} \quad (5.26)$$

gemacht und die dokumentierten Gittermomente einbezogen. Daraus folgt nach elementarer Rechnung:

$$\begin{aligned} U_{II}^s &= \frac{k_s c^2}{2V} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \left[4\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ijkl} + \sum_{\alpha=1}^4 \left(e_i^\alpha e_j^{\alpha-1} e_k^{\alpha-1} e_l^\alpha + e_i^{\alpha-1} e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^{\alpha-1} \right) \right] \\ &= \frac{k_s c^2}{2V} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} [-8\delta_{ijkl} + 4(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Durch Addition von (5.9) ergibt sich die gesamte spezifische Formänderungsenergie $U_{el}^s = U_I^s + U_{II}^s$ zu

$$U_{el}^s = \frac{1}{2t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \left[\underbrace{(k - 2k_D - 8k_s)}_{\stackrel{!}{=0}} \delta_{ijkl} + k_D \delta_{ij} \delta_{kl} + (k_D + 4k_s) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right]. \quad (5.28)$$

Durch geeignete Wahl seines Vorfaktors wird der anisotrope Anteil unterdrückt, die Isotropieforderung lautet damit

$$k - 2k_D - 8k_s = 0. \quad (5.29)$$

Der verbleibende Rest in eckiger Klammer kann im Gegensatz zum BORN-Modell direkt mit den Koordinaten des isotropen Elastizitätstensors nach Gleichung (5.3) verglichen werden. Die Begründung liegt darin, dass diesmal die beiden *richtigen* Produkte $\delta_{ik}\delta_{jl}$ und $\delta_{il}\delta_{jk}$ von Kronecker- δ 2.Stufe *nur als Summe* auftreten und damit die Substitution

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \longmapsto \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (5.30)$$

ermöglicht wird. Im weiteren sind die Abhängigkeiten zwischen LAMÉ-Konstanten und Federsteifigkeiten für den 2D und 3D Fall zusammengefasst

λt	$=$	$\frac{k}{2} - 4k_s$	$\frac{k}{t}$	$=$	2μ			
μt	$=$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k_D}{t}$	$=$	λ	E	$=$	$\frac{4k}{t} \frac{k - 4k_s}{3k - 8k_s}$
k	$=$	$2(k_D + 4k_s)$	$\frac{k_s}{t}$	$=$	$\frac{\mu - \lambda}{4}$	ν	$=$	$\frac{k - 8k_s}{3k - 8k_s} \quad \frac{1}{4} \frac{k - 8k_s}{k - 4k_s}$
								2D 3D

⁶Man beachte, dass die energetischen Drehfederanteile im Gegensatz zu den axialen *vollständig* dem Massenpunkt zuzuordnen sind!

Abschließend noch ein Wort zur Materialstabilität. Um jener zu genügen, müssen die Forderungen (5.6) erfüllt sein. Mitunter sind dazu negative Steifigkeiten zu wählen, woraus sich bei Sicht auf Einzelfedern ein unphysikalisches Verhalten erschließt. Die Stabilität im Verbund mit den anderen Elementen sollte dadurch nicht beeinträchtigt werden. Für die Abbildung des ebenen Verzerrungszustandes ergeben sich beispielsweise

$$k > 0 \wedge -\infty < k_s < \frac{5}{24}k \iff k > 0 \wedge -\frac{k}{3} < k_D < \infty. \quad (5.31)$$

5.2.4 MCA-Modell mit effektiver Bindungslänge

In der Methode der beweglichen zellulären Automaten (*MCA: movable cellular automata*) verwirklicht man das isotrope elastische Kontinuum mit zwei unabhängigen elastischen Konstanten durch Einführung einer *effektiven Bindungslänge* [93]. Um bei Brüchen nicht zwischen verschiedenen Bindungen unterscheiden zu müssen, greift man dabei im ebenen Fall auf ein hexagonales Grundgitter zurück. Die Übertragung der Idee auf das quadratische Gitter soll hier aus zweierlei Gründen nur angedeutet werden. Zum einen kann man die vollständige Abhandlung in [100] nachlesen, zum anderen möchte ich im Anschluss die Vorgehensweise anhand eines speziellen dreidimensionalen Beispiels diskutieren.

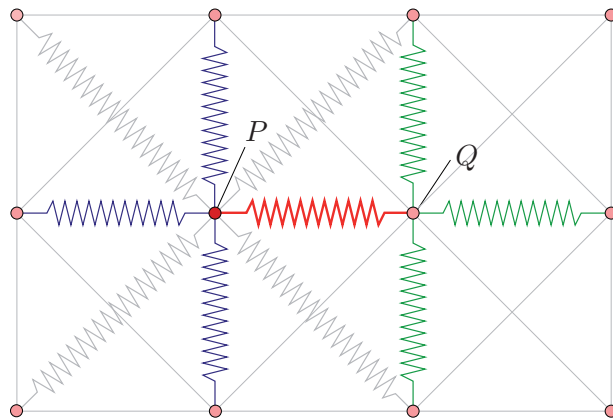


Abbildung 5.4: Zur Erläuterung der *effektiven Bindung* in der Methode der beweglichen zellulären Automaten

Betrachten wir die Methode aus Sicht des Teilchens P in Abbildung 5.4. Die rotmarkierte Bindung erhält eine modifizierte Längenänderung. Sie setzt sich additiv aus dem *normalen* Anteil aufgrund der Verschiebungsdifferenz zwischen P und Q und einem fiktiven Part zusammen, der die gewichteten Federlängen der ersten Nachbarn von Q beinhaltet (grüne Federn).⁷ Diese Vorgehensweise ist auf alle weiteren *ersten* Nachbarn anzuwenden. Bezüglich des Teilchens P lautet die effektive Längenänderung $\Delta\ell_*^\alpha$ der Bindung zum Nachbar Q damit

$$\Delta\ell_*^\alpha = \Delta\ell^\alpha + w \sum_{\beta=1}^4 \Delta\ell^{\alpha\beta}, \quad (5.32)$$

worin der Index β die ersten Nachbarn vom ersten Nachbar Q bezeichnet und w ein Wichtungsfaktor darstellt. Es ist eine interessante Verbindung zwischen dem hier angesprochenen und dem KIRKWOOD-Modell festzustellen, denn beide erweisen sich nach einfacher Substitution

$$w \longmapsto -k_s \quad (5.33)$$

⁷Die betrachtete Bindung geht hier nochmals ein!

als äquivalent.

5.2.5 Zur Randproblematik bei ebenen Systemen am numerischen Beispiel

Die Unabhängigkeit der elastischen Parameter und eine strengere (energetische) Formulierung der Isotropie bildeten den Mittelpunkt vorausgegangener Abschnitte. Welches der vorgestellten Modelle sich am besten für einen bestimmten Simulationszweck eignet, ist fallabhängig zu entscheiden. Hier wurde nur auf eine mögliche modellgebundene Fehlerquelle hingewiesen, die man schnell übersehen kann.

Nehmen wir nun an, wir müssten die Felder im Inneren eines halbumendlichen, zweidimensionalen, elastischen Kontinuums mittels eines Gittermodells möglichst präzise abbilden (beispielsweise wie vom Dimensionsreduktionsalgorithmus auf Seite 50 verlangt). Dann tritt neben der Wahl des Modells noch eine ganz andere Schwierigkeit auf, welche hier nur angesprochen und an einem numerischen Beispiel aufgezeigt werden soll. Gemeint ist die Erfüllbarkeit der Randbedingungen im Unendlichen, die ein gemeinsames Problem aller Verfahren darstellt, die auf einer Diskretisierung des Inneren (Volumens) basieren. Nicht nur im Rahmen der weit verbreiteten *Finite Elemente Methode* beschäftigen sich zahlreiche Forscher damit. So wurden sogenannte *infinite Elemente* entwickelt, die das Fernfeld approximieren. Eine andere Möglichkeit zur Abbildung des *axialsymmetrischen Halbraums* besteht darin, das diskrete Modell gegenüber den Abmessungen des Kontaktgebietes sehr groß zu wählen, was aber die Anzahl der Freiheitsgrade und damit die Rechenzeit erhöht. Außerdem lässt sich diese Alternative aufgrund der *nicht-verschwindenden Verschiebungen im Unendlichen* nicht ohne weiteres auf das *ebene* Kontinuum übertragen! Während man im axialsymmetrischen Fall durch vertikale Gleitlagerungen an den Rändern ($u_r = 0$) eines genügend groß gewählten Systems noch sehr genaue Ergebnisse erzielen kann, führt eine derartige Lagerung im Zweidimensionalen nicht zum Ziel.

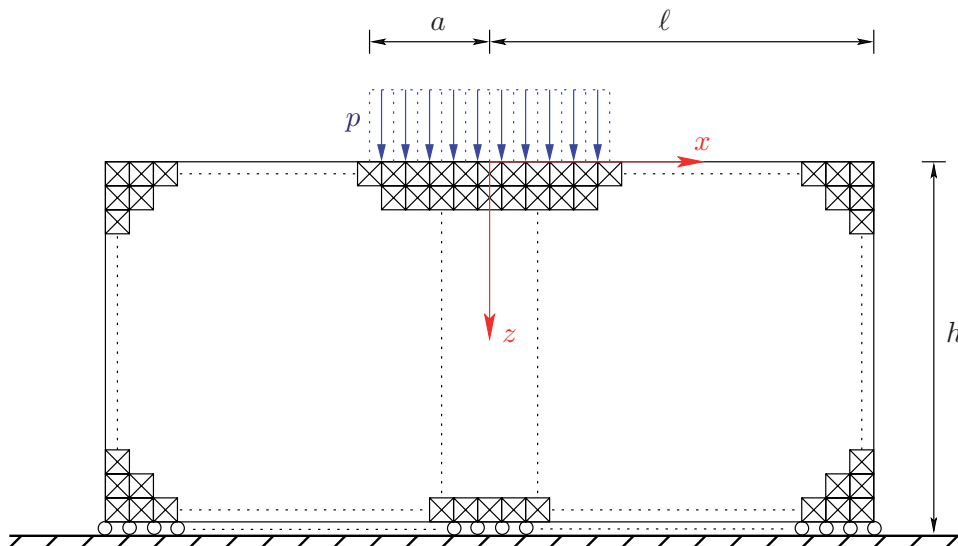


Abbildung 5.5: Finites elastisches Gitter als Modell für ein halbumendliches zweidimensionales Kontinuum; das untere Ende ist reibungsfrei gelagert, d.h. nur die vertikalen Randverschiebungen werden dort unterdrückt.

In der folgenden numerischen Berechnung wurde ein quadratisches Gitter nach Abschnitt 5.2.1 genutzt, um ein elastisches Medium im EVZ mit einer POISSON-Zahl von $\nu = 1/4$ zu modellieren. Da links- und rechtsseitige vertikale Gleitführungen (zur Einschränkung der horizontalen Verschiebungen) schlechtere Resultate einbrachten, blieben diese Ränder *frei*. Die untere Berandung in Ab-

bildung 5.5 soll reibungsfrei sein, was sich gegenüber der lokalen Einschränkung horizontaler und vertikaler Freiheitsgrade als sinnvoller erweist.

An den Knoten innerhalb der Kontakthalbbreite a wirken konstante Punktlasten. Ziel ist die Berechnung der Oberflächenverschiebungen, die im Anschluss der analytischen Lösung der durch eine konstante Streckenlast beaufschlagten Halbebene gegenübergestellt wird. Als Berechnungsverfahren dient die *Matrizen-Verschiebungsmethode*. Durch Überlagerung von Elementsteifigkeitsmatrizen und Berücksichtigung von Randsteifigkeiten durch die *direkte Methode*⁸ wurde die Systemsteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_s$ aufgestellt, die Lösung des Gleichungssystems

$$\tilde{\mathbf{K}}_s \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{P}} \quad (5.34)$$

nach Einbau der Randbedingungen und geeigneter Reduzierung MATLAB überlassen (Lastspalte: $\tilde{\mathbf{P}}$; Verschiebungsspalte: $\tilde{\mathbf{u}}$). Ein charakteristisches Ergebnis zeigt Abbildung 5.6. Hierbei wurde eine Viertelebene durch $\ell * h = 100 * 100$ Knoten diskretisiert.⁹ Die Kontakthalbbreite a umfasst 20 Knoten und damit $1/5$ der Höhe h bzw. der Systemhalbbreite ℓ . Während die Vertikalverschiebungen \bar{u}_z innerhalb des Kontaktgebietes (visualisiert ist der Ausschnitt $-2a < x < 2a$) nahezu exakt der analytischen Lösung entsprechen, weichen die Funktionsgraphen außerhalb immer mehr voneinander ab. Die Vergrößerung des Systems durch Anbau weiterer Gitterbausteine wirkt sich insofern positiv aus, als dass auch in einem gewissen Bereich außerhalb des Kontaktgebietes gute Übereinstimmungen erzielt werden. Das Auseinanderlaufen der Äste zum Rand hin lässt sich hierdurch aber nicht unterbinden (siehe Abbildung 5.7); dieser charakteristische Fehler ist das Resultat der unzureichend erfüllten Randbedingungen! Deren negative Auswirkung auf die Horizontalverschiebungen ist noch viel größer. Um annähernd gleiche Steigungen $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}$ im Bereich $-a < x < a$ zu erzeugen, bedarf es schon eines sehr großen Verhältnisses ℓ/a . Ungeachtet dessen weist das Fernfeld erhebliche Abweichungen auf, was die Abbildung 5.7 wiedergibt.

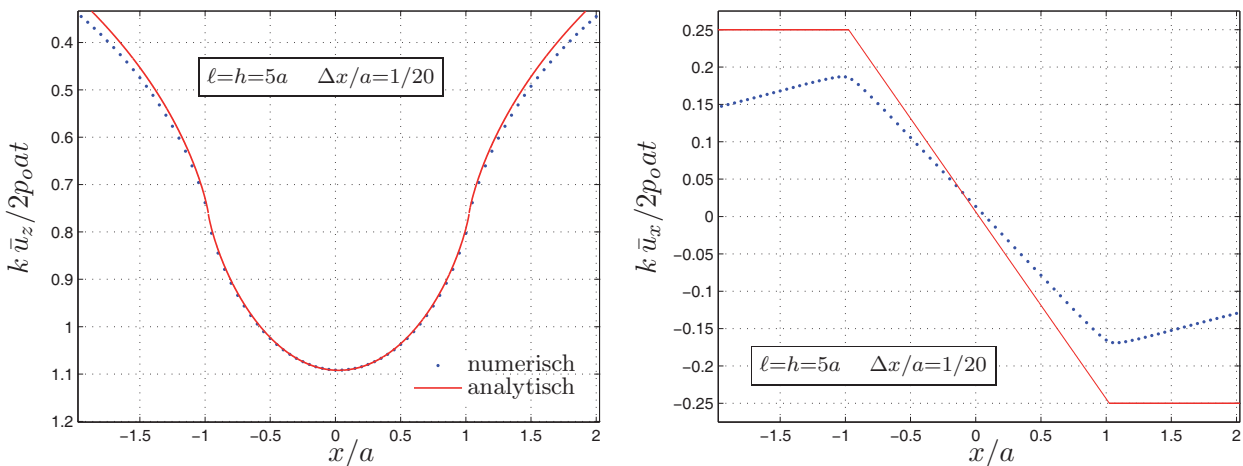


Abbildung 5.6: Normierte Vertikal- und Tangentialverschiebungen der Oberfläche für das Modell aus Abbildung 5.5; Halbsystembreite ℓ und Höhe h stehen im Verhältnis 1:1 und wurden je durch 100 Massenpunkte diskretisiert. Der Kontaktradius a beträgt $1/5$ der Höhe.

⁸Ihrer Definition nach sind die Elemente der Steifigkeitsmatrix nichts anderes als aktive/reaktive Kräfte, die durch Einheitsverschiebungen hervorgerufen werden.

⁹Aufgrund der Achsensymmetrie würde eine diskretisierte Viertelebene ausreichen, wobei der neue Rand $\mathfrak{R}(x=0, z)$ vertikal geführt werden müsste.

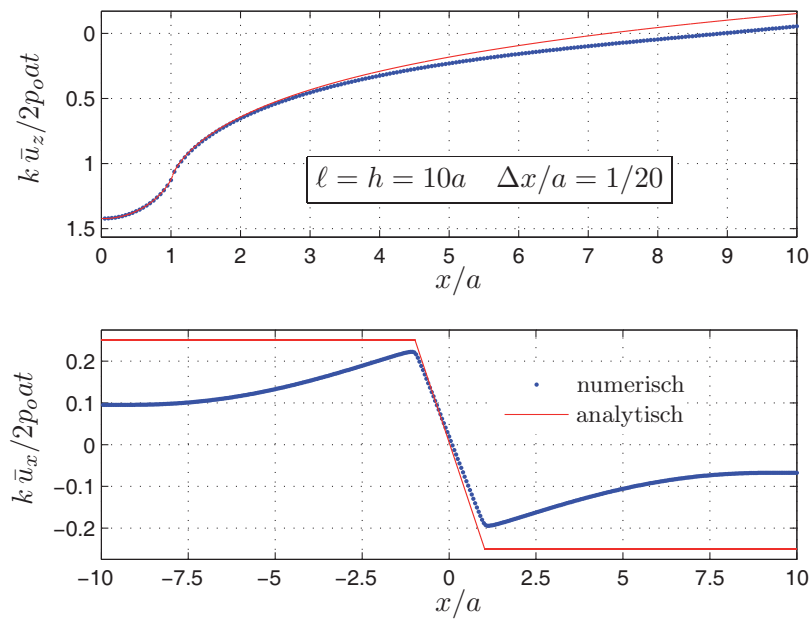


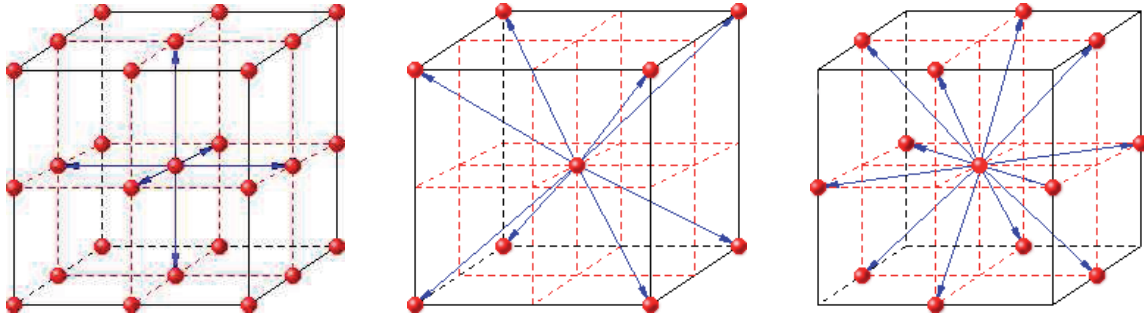
Abbildung 5.7: Halbsystembreite ℓ und Höhe h stehen im Verhältnis 1:1 und wurden je durch 200 Massenpunkte diskretisiert. Der Kontaktradius a beträgt $1/10$ der Höhe.

Analoge Berechnungen wurden auch für eine *symmetrische Dreiecks-Last* durchgeführt. Trotz des geringeren Lastsprunges am Kontaktrand ergab der Vergleich zwischen Numerik und Analytik qualitativ ähnliche Ergebnisse wie bei der konstanten Beanspruchung.

Grundlage vorausgegangener Untersuchungen bildete das in Abschnitt 5.2.1 vorgestellte Gitter mit Zentralwechselwirkungen, was nur eine einzige POISSON-Zahl hergab. Ein elastisches Kontinuum mit anderer Querkontraktion konnte u.a. durch ein einfaches BORN- oder ein KIRKWOOD-Modell realisiert werden. Bei ersterem sollten neben dem oben diskutierten Problem der infiniten Berandung mögliche Abweichungen aufgrund des nichtrotationsinvarianten Potentials beachtet werden. Auch die Stabilität solcher Systeme ist zu prüfen; für $\nu > 1/4$ und damit Wahl negativer Schubsteifigkeit k_s (siehe Tabelle auf Seite 89) führten beispielhafte Rechnungen zu keinem Ergebnis.

5.3 Räumliches Gittermodell mit effektiver Bindung

Zum Abschluss des Kapitels soll mit Hilfe der „effektiven Bindungslänge“ ein räumliches elastisches Gittermodell konstruiert werden, welches den Eigenschaften des isotropen elastischen 3D-Kontinuums genügt. Abbildung 5.8 zeigt drei Beispiele: die *D3Q7*-, *D3Q9*- und *D3Q13*-Anordnung. Die Bezeichnungen stammen aus der Theorie der Gittergase [121], gemeint sind ein banales kubisches, ein kubisch-raumzentriertes (bcc) und ein kubisch-flächenzentriertes Gitter (fcc). Es ist allgemein bekannt, dass kein dreidimensionales Gitter existiert, das allein aufgrund von Wechselwirkungen zu den ersten Nachbarn isotrop ist.

Abbildung 5.8: Anisotrope dreidimensionale Gitteranordnungen: $D3Q7$ -, $D3Q9$ - und $D3Q13$ -Modell

Als Grundlage möchte ich das $D3Q13$ -Modell heranziehen, bei dem das zentrale Teilchen mit seinen zwölf ersten Nachbarn wechselwirkt. Zunächst muss es isotrop gemacht werden, weshalb in einem ersten Schritt Wechselwirkungen zu zweiten Nachbarn hinzugenommen werden – quasi eine Erweiterung auf $D3Q19$.

Kartesische Koordinaten der Gittereinheitsvektoren:

α	1...4	5...8	9...12
$\sqrt{2} e_i^\alpha$	$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$
α	13, 14	15, 16	17, 18
e_i^α	$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

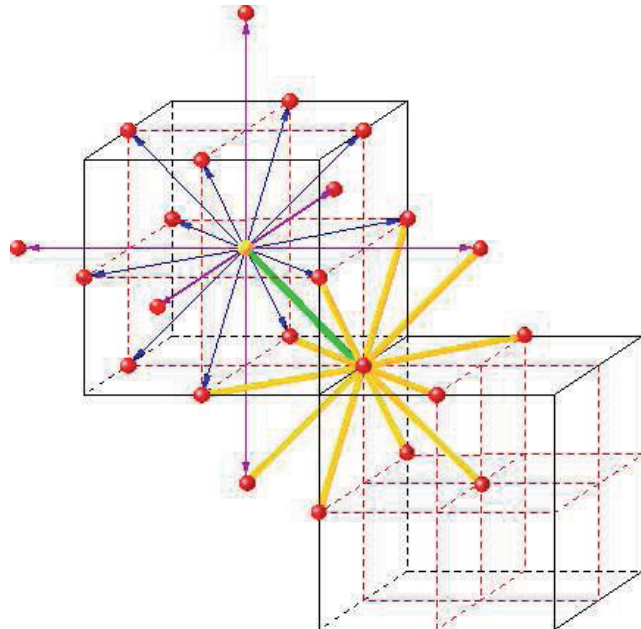


Abbildung 5.9: Erweiterungen der $D3Q13$ -Anordnung: Isotropieerzeugung durch Wechselwirkungen zu den sechs zweiten Nachbarn und Sicherung zweier unabhängiger elastischer Parameter durch zusätzlichen Einfluss der ersten Nachbarn von den ersten Nachbarn per Definition einer „effektiven Bindung“.

Dass dieser Schritt tatsächlich getrennt von dem Einfluss der ersten Nachbarn von den ersten Nachbarn ausgewertet werden darf, hat seine Berechtigung, denn zu den normalen Wechselwirkungen werden nur Kombinationen von Kronecker- δ *zweiter Stufe* hinzukommen! Der dynamische Einflussbereich auf das in Abbildung 5.9 gelbe Teilchen setzt sich aus *drei* Anteilen zusammen:

- Wechselwirkungen zu den zwölf ersten Nachbarn (blau),
- Wechselwirkungen zu den sechs zweiten Nachbarn (magenta),

- (Fiktive) Zusatzkräfte, da die Federn zu den ersten Nachbarn modifiziert werden. In der Skizze beeinflussen die gelb markierten ersten Nachbarn vom ersten Nachbar die Längenänderung der grünen Bindung! Diese Vorgehensweise ist auf alle zwölf Bindungen zu den nächsten Nachbarn auszuweiten.

Mathematisch in Form der Gesamtkraft auf die im Mittelpunkt stehende Punktmasse ausgedrückt, heißt das

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=1}^{12} k_1 \Delta \ell_*^\alpha \mathbf{e}^\alpha + \sum_{\alpha=13}^{18} k_2 \Delta \ell^\alpha \mathbf{e}^\alpha \quad \text{mit} \quad \Delta \ell_*^\alpha := \Delta \ell^\alpha + w \sum_{\beta=1}^{12} \Delta \ell^{\alpha\beta}. \quad (5.35)$$

Die Entwicklung der in $\Delta \ell^{\alpha\beta}$ enthaltenen Verschiebungen erfolgt wie für $\Delta \ell^\alpha$ aufgrund der kraftbasierten Anpassung der Steifigkeiten wiederum bis zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta \ell^{\alpha\beta} &= \left[\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha + \mathbf{c}^\beta) - \mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{c}^\alpha) \right] \cdot \mathbf{e}^\beta \\ &\approx c^\beta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} e_i^\beta e_j^\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \left[(c^\beta)^2 e_i^\beta e_j^\beta e_k^\beta + c^\alpha c^\beta e_i^\beta (e_j^\alpha e_k^\beta + e_j^\beta e_k^\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Symmetrie des Gitters garantiert verschwindende *ungerade* Gittermomente, so dass indizistisch notiert mit (5.36) von (5.35) nur noch

$$\begin{aligned} F_l(\mathbf{X}) &= \frac{k_1}{2} (\sqrt{2}c)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{\alpha=1}^{12} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha + \frac{k_2}{2} (2c)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{\alpha=13}^{18} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha \\ &\quad + \frac{k_1 w}{2} (\sqrt{2}c)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \left(\sum_{\alpha=1}^{12} e_l^\alpha e_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{12} e_i^\beta e_k^\beta + \sum_{\alpha=1}^{12} e_l^\alpha e_k^\alpha \sum_{\beta=1}^{12} e_i^\beta e_j^\beta \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

verbleibt. Leicht nachvollziehbar sind die folgenden Summationen (*gerade* Gittermomente):

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{12} e_i^\alpha e_j^\alpha &= 4\delta_{ij} \\ \sum_{\alpha=1}^{12} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha &= (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \delta_{ijkl} \\ \sum_{\alpha=13}^{18} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha &= 2\delta_{ijkl}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Einsetzen von (5.38) in (5.37) und Berücksichtigung der Invarianz gegenüber beliebigen orthogonalen Transformationen liefert

$$F_l(\mathbf{X}) = k_1 c^2 \left[\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j^2} + 2(1 + 16w) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \right] \wedge k_2 = \frac{1}{4} k_1 \text{ (Isotropieforderung)}. \quad (5.39)$$

Das jedem Teilchen im *fcc*-Gitterverbund zustehende Volumen (WIGNER-SEITZ-Zelle) beträgt $V = \frac{1}{4} \cdot (2c)^3 = 2c^3$, was eingebaut in das *erste Axiom der Mechanik* zu folgender Bilanz führt

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{k_1}{2c} [\Delta \mathbf{u} + 2(1 + 16w) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})]. \quad (5.40)$$

Durch den Koeffizientenvergleich mit der Zentralgleichung der Elastokinetik (5.21) filtern wir die Abhängigkeiten

$$\lambda = \frac{k_1}{2c} (1 + 32w) \quad \mu = \frac{k_1}{2c} \quad (5.41)$$

$$E = \frac{k_1}{4c} \frac{5 + 96w}{1 + 16w} \quad \text{bzw.} \quad \nu = \frac{1 + 32w}{4(1 + 16w)}; \quad (5.42)$$

die Querdehnzahl ν ist allein eine Funktion des Wichtungsfaktors w . Da der Elastizitätsmodul neben w noch die Steifigkeit k_1 enthält, sind zwei unabhängige elastische Parameter gefunden, so wie es von einem linear elastischen, isotropen Kontinuum verlangt wird.

Kapitel 6

Kontaktsimulation mittels hierarchischer Gittermodelle

Zur Simulation der in tribologischen Systemen auftretenden Prozesse, wie z.B. elastoplastische Deformation, Bruch und Verschleißvorgänge kommen sehr oft Teilchenmethoden zum Einsatz. Die MCA-Methode [96] stellt diesbezüglich ein allumfassendes Verfahren dar, da es sämtliche tribologischen Mechanismen abbilden kann. Neben solchen universellen Simulationsverfahren existieren zahlreiche, die der Untersuchung ganz spezieller technischer Problemstellungen dienen. So eignen sich beispielsweise besondere zwei- und dreidimensionale zelluläre Automaten hervorragend zur Beschreibung der Grenzschichtdynamik von Bremssystemen [77, 74, 78].

Die Mikrodynamik des Modells muss nicht zwangsläufig mit der des realen Systems übereinstimmen, wenn nur die Abbildung makroskopischer Vorgänge im Vordergrund steht. Sogar ein vermeintlich „falsches“ mikroskopisches Verhalten kann durch geeignete „Neudefinition“ kinematischer und dynamischer Variablen auf lokal korrekte, reale Größen führen, so geschehen in [33].

Dieses Kapitel wird sich insofern von allen bisherigen unterscheiden, als dass wir uns von der Aufgabe lösen, ein Kontaktproblem exakt abbilden zu wollen. Unter Berücksichtigung typischer Annahmen [90, 94] soll ein geeignetes Modell – *ein hierarchisches Feder-Masse-System* – formuliert werden, welches die charakteristischen Eigenschaften des elastischen Kontaktes mit *rauen Oberflächen* qualitativ richtig wiedergibt. Mit Hilfe der zum Teil sehr strengen Vereinfachungen ist eine erhebliche Einsparung an Rechenzeit verbunden, ohne nennenswerten Verlust an Genauigkeit. Die Anpassung der Modellparameter wird im wesentlichen durch Vergleich mit dem Original erfolgen, d.h. auf ein „individuelles Fitting“ verzichtet.

6.1 Motivation

6.1.1 Vollständiger Kontakt zwischen einer starren sinusförmigen Oberfläche und dem elastischen Halbraum

Als motivierendes Beispiel betrachten wir zunächst einen starren Körper mit sinusförmiger Oberfläche der Wellenlänge λ und Amplitude h , der soweit in den elastischen Halbraum gedrückt wird, bis gerade vollständiger Kontakt besteht, also keine Lücke mehr vorhanden ist.¹ Die in diesem Zustand innerhalb des Kontaktgebietes wirkenden Normalspannungen lauten

$$p(x) = p_o \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \right], \quad (6.1)$$

¹Die Deformationen seien dabei als rein elastisch angenommen!

wobei der aufzubringende mittlere Kontaktdruck nach $p_o = \pi \tilde{E} \frac{h}{\lambda}$ vom effektiven elastischen Modul und dem Rauheitsparameter h/λ abhängt. Es ist allgemein bekannt und aus genanntem Zusammenhang sofort ersichtlich, dass ein steiferer Körper oder aber eine größere Rauigkeit mehr Anpressdruck verlangen.

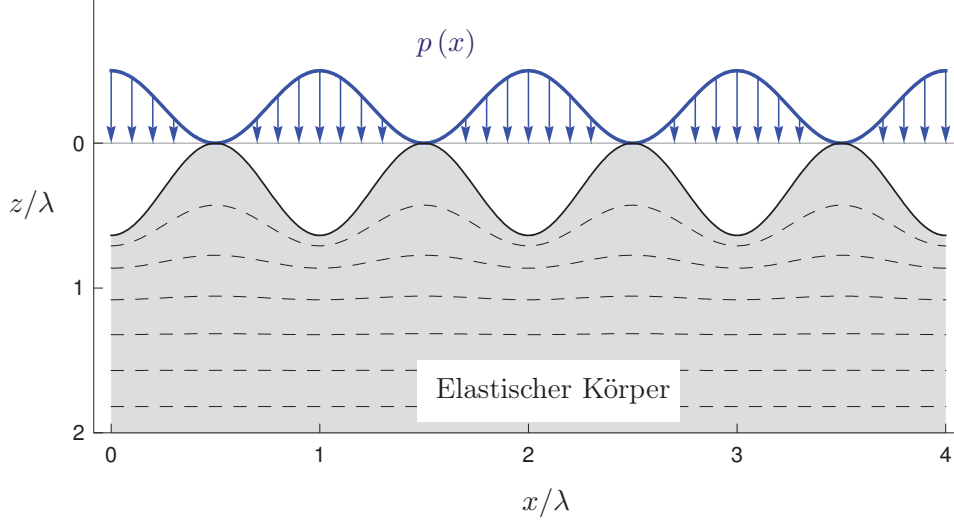


Abbildung 6.1: Starrer Körper mit sinusförmiger Oberfläche der Wellenlänge λ in vollständigem Kontakt mit einem elastischen Halbraum: Eingezeichnet sind die Kontaktspannungsverteilung nach (6.1) und das (abklingende) Normalverschiebungsfeld in der normierten Form (6.2) für $\nu = 0.3$.

Abbildung 6.1 zeigt die Druckverteilung, die (normierte) relative Normalverschiebung der Oberfläche sowie einiger Punkte im Inneren, die in der Referenzkonfiguration auf ausgewählten Horizontalen lagen, gemäß

$$\frac{u_z(x, z)}{\pi h} - C = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z}{1 - \nu} + \frac{\lambda}{\pi} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}. \quad (6.2)$$

Das induzierte Feld im Inneren behält die charakteristische Wellenlänge bei, während seine Amplitude mit steigendem z exponentiell abnimmt. In einer Tiefe von $z_G \approx \lambda$ sind alle Heterogenitäten im Verschiebungsfeld beinahe vollständig abgeklungen. Gleiches gilt daher für die einzelnen Spannungskomponenten, da sie aus den Verschiebungsableitungen hervorgehen. Die Hauptschubspannungen sind insbesondere unabhängig von der Koordinate x

$$\tau_H(z) = \frac{2\pi p_o}{\lambda} z e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}; \quad (6.3)$$

sie nehmen für $z_M = \frac{\lambda}{2\pi}$ ihren Maximalwert $\text{Max}[\tau_H] = \frac{p_o}{e}$ an, von dem im besagten Abstand z_G , also von einer Wellenlänge normal zur Oberfläche, nur noch ca. 3% vorherrschen!

Erweitern wir nun die Aufgabenstellung, indem wir eine Oberfläche mit Welligkeiten auf zwei verschiedenen Skalen annehmen:

$$\bar{u}_z(x) = h_1 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} x \right) + h_2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} x \right) \quad \text{mit } h_2 \ll h_1 \wedge \lambda_2 \ll \lambda_1. \quad (6.4)$$

Dann wird sich das resultierende Verschiebungsfeld aus einer einfachen Überlagerung der beiden Fälle ergeben. Der kurzwellige Anteil klingt bereits in den obersten Schichten vollständig ab (Reichweite λ_2), während sich der langwellige bis zu einer Tiefe von $z \approx \lambda_1$ erstreckt (siehe Abbildung 6.2).

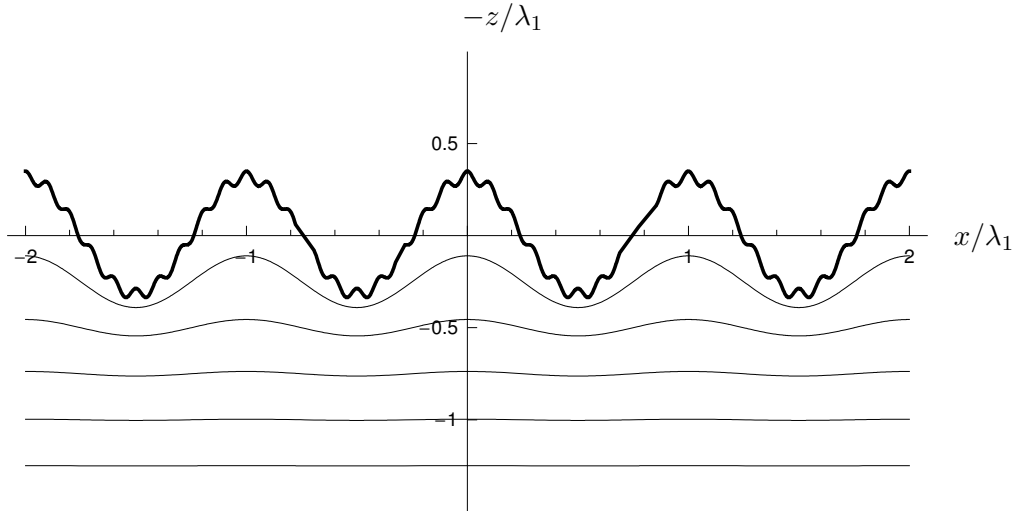


Abbildung 6.2: Oberfläche mit Welligkeiten auf zwei verschiedenen Skalen und daraus resultierende Normalverschiebungen im elastischen Halbraum bei Annahme eines vollständigen Kontaktes und $\nu = 0.3$.

Den notwendigen Anpressdruck für einen kompletten Kontakt gewinnt man gleichermaßen aus der Superposition [90]

$$p_o = \pi \tilde{E} \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} \right). \quad (6.5)$$

Die Aussagen über das räumliche Abklingverhalten sämtlicher Gradienten in Abhängigkeit der Wellenlänge der Oberflächenverschiebung bilden den Schlüssel nachfolgender Überlegungen.

6.1.2 Struktur hierarchischer Systeme

Raue Oberflächen besitzen Wellenlängen auf verschiedenen Skalen. Aufgrund der Abhängigkeit der Reichweite des Deformationsfeldes von der Wellenlänge der Rauigkeit ist lediglich eine sehr feine Diskretisierung im oberflächennahen Bereich erforderlich. Mit zunehmender Tiefe ist eine Vergrößerung zulässig, die keine (nennenswerten) Auswirkungen auf die Genauigkeit der Ergebnisse hat. Ein Modell, das von dieser Möglichkeit Gebrauch macht, wollen wir *hierarchisches System* nennen, da seine Teilchenanordnung eine solche Struktur aufweist.

Hierarchische Strukturen können auf ganz unterschiedliche Weise erzeugt werden. Abbildung 6.3 zeigt diejenige, welche wir im weiteren verwenden werden. Sie beruht im zweidimensionalen Fall auf einer Halbierung der Teilchenanzahl von Schicht zu Schicht, wobei der Schichtabstand jeweils verdoppelt wird². In gleicher Weise werden wir ein dreidimensionales Modell benutzen, das einen Aufbau in y -Richtung analog dem in x -Richtung hat. Anstelle von N^2 Teilchen im zweidimensionalen Fall bei homogener Diskretisierung benötigen wir so nur $S = 2N - 1$, im räumlichen $S = \frac{1}{3}(4N^2 - 1)$ statt N^3 . Auch dieses kann als eine Art *Dimensionsreduktion*³ interpretiert werden, da die Teilchenanzahl in einem hierarchischen System je um eine Größenordnung geringer ausfällt, als die im Original.

²Es wird also in x - und z -Richtung je eine Vergrößerung um den Faktor 2 vorgenommen!

³Selbstverständlich hat diese in der Literatur desöfteren zu findende *Dimensionsreduktion* nichts mit der gemein, welcher in den vorausgegangenen Kapiteln behandelt wurde und etwas absolut neues darstellt!

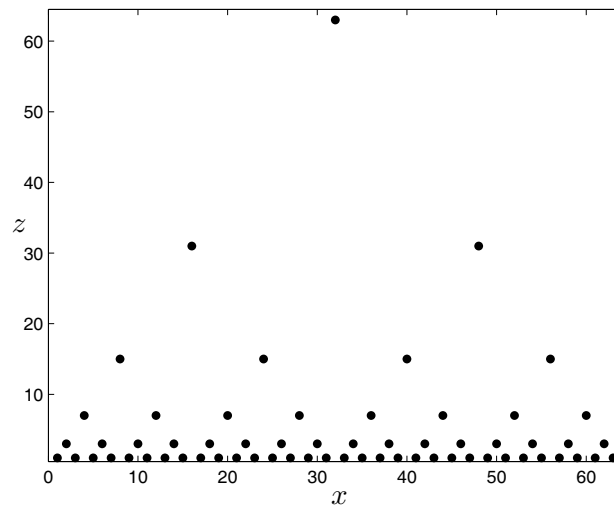


Abbildung 6.3: Beispielhafte Anordnung von Teilchen in einem ebenen hierarchischen Modell

Die hier angewandte Vergrößerung ist als Extremfall anzusehen, der sicherlich die Genauigkeit beeinträchtigt, jedoch aufgrund noch weiterer Modellannahmen vertretbar ist. Unter anderem soll jedes Teilchen *nur einen vertikalen Freiheitsgrad* besitzen. Ferner wird die Wechselwirkung mit dem Grundkörper durch eine allein vom vertikalen Abstand abhängige *fiktive Abstoßungskraft* simuliert. Genauere Angaben zur Kinematik und Dynamik des verwendeten hierarchischen Systems wie beispielsweise die Anpassung der Steifigkeiten in Abhängigkeit der Materialparameter des elastischen Halbraums werden in Anhang F gemacht. Ein andere Variante eines hierarchischen Systems wird in [124] vorgestellt. Diese lässt durch eine Vergrößerung nur alle zwei Schichten, den Einbau von fließenderen Übergängen sowie der Berücksichtigung aller drei Teilchentranslationen eine größere Genauigkeit vermuten, ist dadurch jedoch auch wesentlich komplizierter als das hier vorliegende und erfordert deutlich mehr Rechenzeit. Auch ist es keinesfalls isotrop und kann ebenfalls nur Stoffe mit einer Querdehnzahl von $\nu = 0$ abbilden.

Unser Ziel ist es, zu qualitativ guten Ergebnissen für den Normalkontakt mit rauen Oberflächen mit dem erheblich einfacheren Modell zu gelangen. Ehe solche Gegenstand der Untersuchung sind, muss die Güte des Modells anhand grundlegender Kontaktversuche geprüft werden. Auch die Kontaktdefinition geht zum Teil aus einer Anpassung an analytisch bekannte Standardfälle hervor.

6.2 Kontaktformulierung und Testfälle

Bevor wir uns dem übergeordneten Ziel – der Simulation des rauen Kontaktes – zuwenden, müssen wir eine geeignete *Kontaktformulierung* finden. Darunter ist (zunächst) das Auffinden eines kritischen Abstandes zweier zugeordneter Teilchen aus elastischem Block und Grundkörper zu verstehen, ab welchen von *Kontakt* gesprochen werden darf.

6.2.1 Vollständiger Kontakt mit sinusförmiger Oberfläche

Als Beispiel wird der in der Einleitung (Kapitel 6.1.1) beschriebene Kontakt eines elastischen Blockes mit einer starren gewellten Oberfläche herausgenommen. Es ist bekannt [53], dass sich der Quotient

aus realer und scheinbarer Kontaktfläche aus dem Verhältnis von mittlerem Kontaktdruck \bar{p} und kritischem Anpressdruck p_o nach

$$\frac{A_{\text{real}}}{A_o} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\bar{p}}{p_o}} \right) \quad (6.6)$$

ergibt. Bei Erreichen des kritischen Anpressdrucks liegt vollständiger Kontakt vor.

Zur Simulation dieses Kontaktes wurde das in Anhang F genauer erläuterte, ebene hierarchische Modell eingesetzt; der Zusammenhang (F.3) zwischen Längs- und Schubsteifigkeit dabei beachtet.⁴ Als allein vom vertikalen Abstand zwischen den Kontaktpartnern abhängige fiktive Wechselwirkung wurde die aus dem Potenzial zwischen Atom und dreidimensionalen Körper abgeleitete Abstoßungskraft herangezogen (Gleichung (F.4)). Abbildung 6.4 zeigt die numerischen Resultate und stellt sie der analytischen Lösung (6.6) gegenüber. Bei konstanter Amplitude $h = 10\Delta x$ wurden verschiedene Wellenlängen untersucht, die Kontaktkraft, welche zum vollständigen Kontakt führt, entsprechend angepasst.

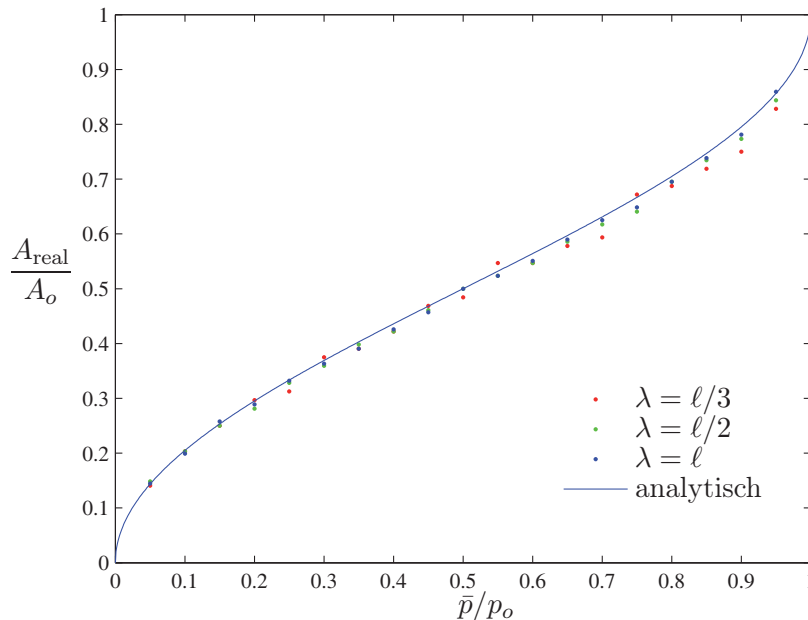


Abbildung 6.4: Abhängigkeit der realen Kontaktfläche A_{real} vom mittleren Kontaktdruck \bar{p} in normierter Form; Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse des zweidimensionalen hierarchischen Gittermodells und der analytischen Lösung (6.6) für drei verschiedene Wellenlängen. Die unterste Schicht wurde durch 512 Teilchen (Teilchenabstand Δx) diskretisiert, die Amplitude beträgt $10\Delta x$.

Bei den größeren Wellenlängen $\lambda_1 = \ell$ und $\lambda_2 = \ell/2$ ist eine sehr gute Übereinstimmung von Numerik und Analytik zu erkennen. Für $\lambda = \ell/3$ sind gerade bei größeren mittleren Drücken Abweichungen zu finden. Dabei darf allerdings nicht außer Acht gelassen werden, dass die Amplitude bereits von der Größenordnung $h \approx \lambda/10$ ist und damit typische Rauheitswerte überschreitet.

⁴Von der wohl am ehesten physikalisch nachvollziehbaren Zuordnung $k^L/t = \tilde{E}$ musste ich leider Abstand nehmen, stattdessen eine um ziemlich genau den Faktor „2“ veränderte $2k^L/t = \tilde{E}$ annehmen, um der Analytik beim vollständigen Kontakt zu entsprechen.

6.2.2 HERTZscher Kontakt

Im Hinblick auf die Simulation des Kontaktes mit rauen Oberflächen wird für das dreidimensionale hierarchische System eine exponentiell abfallende, fiktive Wechselwirkungskraft vorgezogen. Der kritische vertikale Abstand und die kritische Kontaktkraft, bei welchen von „Kontakt“ geredet werden darf, sollen aus einer Anpassung an die HERTZsche Kontakttheorie hervorgehen. Als gegebene Größen werden die Normalkraft P , der Krümmungsradius der Kugel R sowie der generalisierte Elastizitätsmodul \tilde{E} angesehen. Aus letzterem lassen sich die Längs- und Schubsteifigkeiten berechnen (siehe Anhang F). Die Theorie des Kontaktes einer starren Kugel mit dem elastischen Halbraum liefert die bekannten Zusammenhänge für den Maximaldruck p_o , den Kontaktradius a und die Eindringtiefe δ

$$p_o = \left(\frac{6P\tilde{E}^2}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{3PR}{4\tilde{E}} \right)^{1/3}, \quad \delta = \left(\frac{3P}{4\tilde{E}R^{1/2}} \right)^{2/3}. \quad (6.7)$$

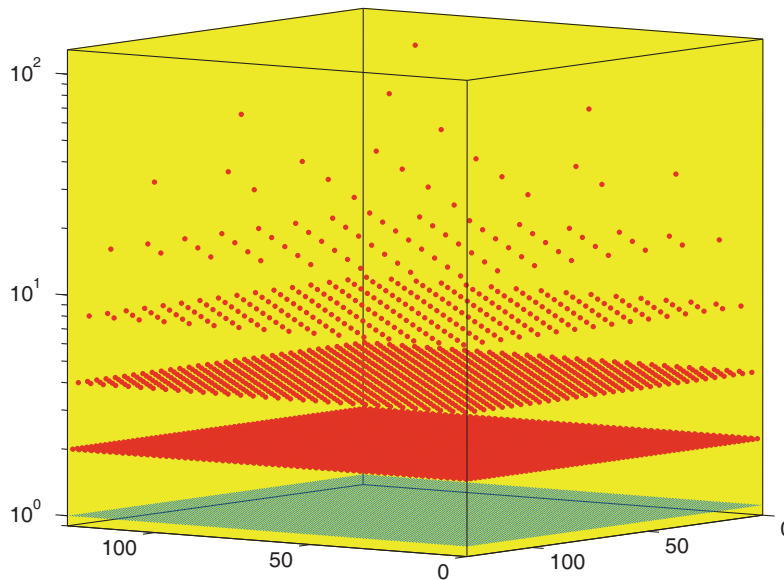


Abbildung 6.5: Teilchenanordnung im dreidimensionalen hierarchischen System; die unterste, blaumarkierte Schicht umfasst $128 * 128$ Teilchen.

Für die numerischen Simulationen dieses Kapitels wird von der Software MATLAB Gebrauch gemacht, jedoch gegenüber der Vorgehensweise aus Kapitel 5 - der Methode der Steifigkeitsmatrizen - eine *überkritisch gedämpfte* (kinetische) Rechnung getätigt, d.h. für jedes Teilchen die zugehörige Bewegungsdifferentialgleichung nach dem *zweiten Newtonschen Grundgesetz* aufgestellt und darauf anschließend ein einfaches Differenzenverfahren (EULER-Verfahren) angewendet. So ist das Programm für statische und kinetische Simulationen einsetzbar.

Abbildung 6.5 zeigt noch einmal das (zumeist) verwendete hierarchische Modell in der Ausgangskonfiguration mit $128 * 128$ Teilchen in der untersten Schicht⁵, welches im weiteren auf starre Kugeln

⁵Die Verdoppelung der Schichtabstände in z -Richtung ist aufgrund logarithmischer Skalierung nicht sofort ersichtlich.

unterschiedlicher Krümmungsradien R gedrückt wird.⁶ Mit Hilfe des numerisch berechneten Druckes p_o , welcher sich im Zentrum des Kontaktgebietes ergibt, lässt sich in Verbindung mit der Normalkraft P ein Kontaktradius a_N bestimmen und damit den Verlauf der HERTZschen Pressung. Nun wird geschaut, welche Teilchen sich innerhalb der durch a_N definierten Kontaktfläche befinden. Der maximale Abstand Δz_{kr} eines Teilchens zur Oberfläche unter der Menge der einbeschriebenen Teilchen entscheidet zwischen Kontakt und Nicht-Kontakt, er soll das *Kontaktkriterium bei der Untersuchung des Kontaktes rauher Oberflächen* bereitstellen.⁷ Selbstverständlich muss die Allgemeingültigkeit einer solchen Kontaktbedingung geprüft werden. Der kritische Abstand Δz_{kr} zeigte sich als nahezu unempfindlich auf Änderungen der Belastung P bei konstanter Krümmung (Abweichungen $< 5\%$). Variationen des Krümmungsradius R über eine 10er Potenz bewirkten ebenfalls nur geringfügige Schwankungen dieser kontaktgebenden Kenngröße. Lediglich Variationen des verallgemeinerten elastischen Moduls (nicht des Zusammenhangs zwischen Schub- und Längssteifigkeiten) stellt die (modellbezogene) Allgemeingültigkeit der Kontaktbedingung in Frage. Hier ergaben sich zum Teil erhebliche Unterschiede; tendenziell nahm der kritische Abstand mit wachsender Steifigkeit ab.

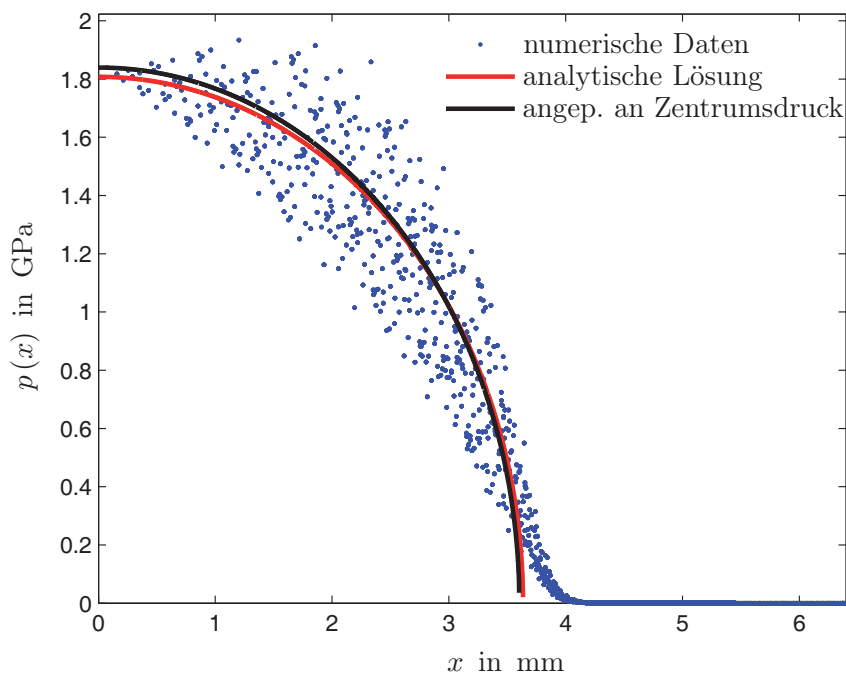


Abbildung 6.6: HERTZscher Kugelkontakt; Vergleich der Ergebnisse des hierarchischen Modells mit der analytischen Lösung. Eingezeichnet ist auch die mittels Anpassung an den Zentrumsdruck der Numerik erhaltene Druckverteilung, welche auf die *Kontaktbedingung* führt.

Abbildung 6.6 vergleicht die Ergebnisse des hierarchischen Modells mit der analytischen Lösung des HERTZschen Kontaktes. Zudem ist der Verlauf der HERTZschen Pressung unter Berücksichtigung des Druckes im Zentrum des Kontaktgebiets skizziert (schwarze Linie), mit deren Hilfe auf oben beschriebene Weise die Kontaktbedingung gewonnen wird. Im speziellen Fall wurde das (skalunenabhängige) hierarchische System zur Simulation eines makroskopischen Kontaktes, charakterisiert

⁶Es ist allgemein bekannt, dass der Kontakt zweier elastischer Körper über den Kontakt eines starren mit einem elastischen Körper abgebildet werden kann; verallgemeinerter E -Modul \tilde{E} und Krümmungsradius \tilde{R} sind entsprechend zu modifizieren [53].

⁷Voraussetzung dieser Vorgehensweise sind ausreichend viele Teilchen innerhalb des Kontaktgebietes; nach oben hin wird das Verfahren durch die Systemgröße beschränkt.

durch $\tilde{E} = 100$ GPa, $R = 128$ mm und $P = 50$ kN herangezogen. Das Modell liefert den Maximaldruck⁸ $p_o \approx 1.8$ GPa und einen Kontaktradius $a \approx 3.6$ mm, welche in hervorragendem Einklang mit der Theorie stehen.

Im Rahmen der nachfolgenden Untersuchung des Kontaktes rauher Oberflächen wird das hierarchische System als Multiskalenmodell dienen, dabei von „*Kontakt*“ nach den Erläuterungen dieses Abschnitts gesprochen!

6.3 Kontakt mit rauhen Oberflächen

Mikroskopisch betrachtet findet der Kontakt zweier Festkörperoberflächen nur an einzelnen Rauheitsspitzen – *Asperiten* – statt, die reale Kontaktfläche A_{real} als Summe der Mikrokontaktflächen ist demnach sehr viel kleiner als die scheinbare. Neben der Kraftübertragung findet auch der Wärmetransport in diesen lokal begrenzten Bereichen statt, in gleicher Weise wird der elektrische Widerstand beeinflusst. Bereits 1939 nutzten BOWDEN und TABOR [14] die elektrische Leitfähigkeit aus, um auf die reale Kontaktfläche zu schließen. Dabei stellten sie fest, dass sich die reale Kontaktfläche direkt proportional der aufgebrachten Normalkraft P ändert und nahmen daher an, dass sämtliche Mikrokontakte plastisch verformt seien. Letztendlich hängt sogar die Größe von Verschleißteilchen von den Abmessungen der Mikrokontakte ab. Die möglichst präzise Voraussage von Größe und Topographie der realen Kontaktfläche spielt demnach eine wichtige Rolle.

Mittlerweile existieren zahlreiche Theorien, die den linearen Zusammenhang $P \sim A_{\text{real}}$ im Bereich kleinerer Normalkräfte (annähernd) auch für den *elastischen Kontakt* von rauhen Oberflächen aufzeigen. Ältere gehen dabei zumeist von den HERTZschen Beziehungen (6.7) für den Einzelkontakt aus und weisen die angesprochene Abhängigkeit über die Verbundwirkung aller Asperiten (*multi-asperity-contact*) nach. ARCHARD [4] präsentierte bereits eine Art fraktales Multiskalenmodell, dabei ging er von einer makroskopisch sphärischen Kugelkappe (Krümmungsradius R_1) aus und füllte deren Oberfläche vollständig mit kleineren auf. Diese Kappen mit geringerem Krümmungsradius ($R_2 \ll R_1$) wurden nun ihrerseits wiederum durch noch kleinere Paraboloiden besetzt. Je mehr Stufen er hinzunahm, desto näher kam er einem linearen Zusammenhang zwischen realer Kontaktfläche und äußerer Last. GREENWOOD und WILLIAMSON [40] gelangten zu einem ähnlichen Ergebnis, wobei sie allen Kappen ein und dieselbe Krümmung gaben, deren Höhen jedoch GAUSS-verteilt.

BUSH, GIBSON und THOMAS [18] wiesen erstmalig eine *strikte Linearität* zwischen Kontaktkraft und realer Kontaktfläche nach, indem sie die zufallsverteilten Rauheitsspitzen durch Paraboloiden annähernten. Ihren Ergebnissen kommt besondere Bedeutung zu, da sie quasi bis heute noch Bestand haben. Selbst jüngste Theorien, die von einer fraktalen Beschreibung rauher Oberflächen ausgehen, unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor $\pi/2$. In diesem Zusammenhang sind vor allem die Beiträge von PERSSON zu nennen [81, 82, 86], der die *reale* Kontaktfläche an die betrachtete Längenskala λ bindet, wobei Rauigkeiten kleiner λ weggeglättet werden. Die Ergebnisse seiner Kontakttheorie angewandt auf *selbstaffine Oberflächen* werden u.a. anschließend zur Bewertung numerischer Resultate des hierarchischen Systems herangezogen.

⁸Der Druck im Zentrum wird als Maximaldruck bezeichnet/angenommen, d.h. die fluktuationsbedingten Überhöhungen ignoriert. Sie sind eine Folge des stark vereinfachten Modells, bei welchem geringste Unterschiede im Abstand zur starren Oberfläche Sprünge in der lokalen Druckverteilung erzeugen.

6.3.1 Höhenprofil und Leistungsspektrum

Es soll von der üblichen Annahme Gebrauch gemacht werden, dass die raue Oberfläche vollständig durch das Leistungsspektrum der Rauheiten charakterisiert ist

$$C(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^2x. \quad (6.8)$$

Hierin steht $\langle \dots \rangle$ für Ensemble-Mittelung und $h(\mathbf{x})$ gibt das Höhenprofil gemessen vom Mittelwert an, so dass $\langle h(\mathbf{x}) \rangle = 0$ ist. Ferner wurden die statistischen Eigenschaften der Oberfläche als translationsinvariant vorausgesetzt. Durch Rücktransformation von (6.8) erhält man entsprechende Statistik im Ortsraum, ausgedrückt über die Autokorrelation

$$\langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0}) \rangle = \int C(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^2q. \quad (6.9)$$

Die numerische Erzeugung des Höhenprofils $h(\mathbf{x})$ aus dem Leistungsspektrum ist in [85] näher erläutert. Darin wird das Profil über eine FOURIER-Reihe ausgedrückt

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{q}} B(\mathbf{q}) e^{i[\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} + \phi(\mathbf{q})]}, \quad (6.10)$$

dessen Koeffizienten gemäß

$$B(\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{L} \sqrt{C(\mathbf{q})} = B(-\mathbf{q}) \quad (6.11)$$

zu wählen sind. Die Phasen sind auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ zufällig (gleich-)verteilt, mit $\phi(\mathbf{q}) = -\phi(-\mathbf{q})$. Im weiteren sollen die statistischen Eigenschaften der Oberfläche als isotrop angenommen werden, so dass das Leistungsspektrum und damit die FOURIER-Koeffizienten nur vom Betrag des Wellenvektors $q := |\mathbf{q}|$ abhängen $C(\mathbf{q}) = C(q)$. Wichtige statistische Kennwerte, wie die mittlere quadratische Höhe und die mittlere quadratische Steigung, lassen sich über das Leistungsspektrum wie folgt berechnen:⁹

$$\langle h^2 \rangle = \int C(q) d^2q = 2\pi \int q C(q) dq \quad (6.12)$$

$$\langle (\nabla h)^2 \rangle = \int q^2 C(q) d^2q = 2\pi \int q^3 C(q) dq. \quad (6.13)$$

6.3.2 Selbstaffin fraktale Oberflächen

Viele technische Oberflächen sind in einem definierten Wellenzahlbereich $q_0 \leq q \leq q_1$ annähernd *selbstaffin fraktal* (z.B. Oberflächen von Asphaltstraßen), was bedeutet, dass sich ihre statistischen Eigenschaften nach einer Skalentransformation nicht ändern. Die Streckung in z -Richtung weicht dabei von der in der (x, y) -Ebene ab und ist durch den Rauigkeitsexponenten H (HURST-Exponent) festgelegt:

$$h(x, y) = \xi^H h\left(\frac{x}{\xi}, \frac{y}{\xi}\right), \quad \text{mit } 0 \leq H \leq 1. \quad (6.14)$$

Man kann zeigen, dass das Leistungsspektrum solcher Oberflächen gemäß

$$C(q) \sim q^{-2(H+1)} \quad (6.15)$$

⁹Übliche RMS-Werte (*root-mean-square*) erfordern noch die Wurzel, so ist beispielsweise der quadratische Mittenrauwert durch $h_{\text{RMS}} := \sqrt{\langle h^2 \rangle}$ definiert; der RMS-Wert der Steigung wird im weiteren mit ∇Z abgekürzt.

abfällt. Für die folgenden numerischen Simulationen wird die Oberfläche in gleicher Weise diskretisiert wie die unterste Schicht im verwendeten hierarchischen System. Der Gitterabstand Δx begrenzt den größtmöglichen Betrag des Wellenvektors $q_1 = \frac{2\pi}{\Delta x}$, während die Systembreite die untere Schranke vorgibt $q_0 = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta x}$.¹⁰ Abbildung (6.7) zeigt zwei nach obigen Ausführungen numerisch erzeugte selbstaffine Oberflächen ($N = 256$), die sich nur durch Wahl der oberen Grenzwellenzahl unterscheiden. Während linkerhand lediglich Wellenlängen größer gleich $16 \Delta x$ berücksichtigt werden, ist die Oberfläche rechterhand über den größtmöglichen Skalenbereich $\Delta x, \dots, L$ selbstaffin fraktal.

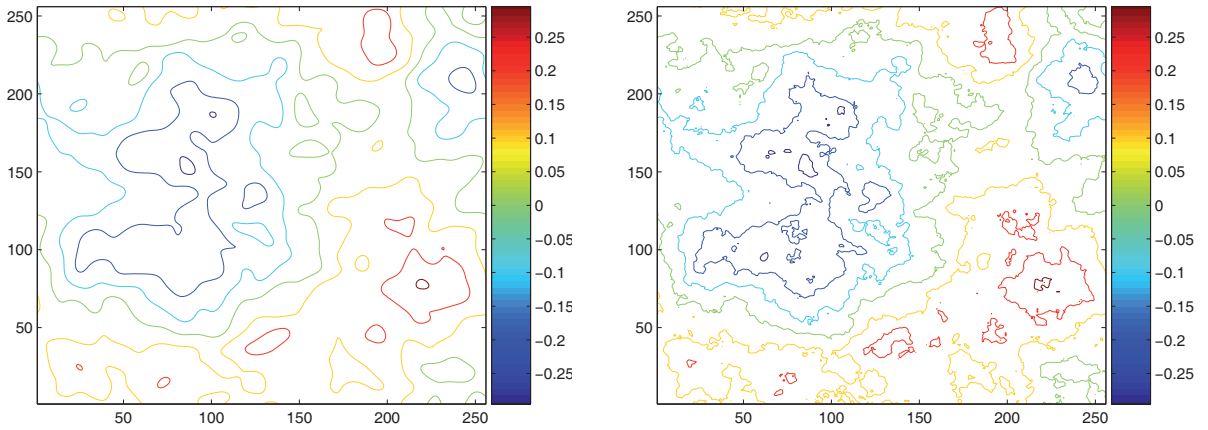


Abbildung 6.7: Numerisch erzeugte selbstaffine Oberflächen (256×256 Teilchen) mit unterschiedlichen oberen Grenzwellenzahlen (links $q_1 = 16q_0$, rechts $q_1 = 256q_0$) bei gleicher unterer Grenzwellenzahl $q_0 = \frac{2\pi}{L}$. Die Systembreite beträgt $L = 256 \Delta x$, der HURST-Exponent $H = 0.8$ und der quadratische Mittenrauwert $h_{\text{RMS}} \approx 0.13$.

6.4 Ergebnisse numerischer Simulationen mit selbstaffin fraktalen Oberflächen

Bereits BUSH, GIBSON und THOMAS [18] lieferten eine Theorie, die für kleine Normalkräfte P auf einen konstanten mittleren Druck führte

$$\frac{P}{A} = \kappa^{-1} \tilde{E} \sqrt{\langle (\nabla h)^2 \rangle}, \quad (6.16)$$

welcher von der mittleren quadratischen *Steigung* der Oberfläche und dem effektiven elastischen Modul kontrolliert wird. Die Theorie von PERSSON [82, 81] zeigt dasselbe Ergebnis auf, nur der dimensionslose Faktor κ nimmt einen anderen Wert an:

$$\begin{aligned} \text{BUSH:} \quad \kappa &= \sqrt{2\pi} \approx 2.51 \\ \text{PERSSON:} \quad \kappa &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 1.6 \quad . \end{aligned}$$

¹⁰Reale Oberflächen zeigen gewöhnlich bis zu einer gewissen Grenze ein konstantes Spektrum, bevor es dann entsprechend (6.15) abfällt.

In [86] begründet PERSSON die Abweichung über die von BUSH (wie von GREENWOOD und WILLIAMSON) angenommene Unabhängigkeit der Asperiten, die zu einer etwas zu großen Kontaktfläche führt. HYUN und PEI [49] stellten *Finite Elemente* Berechnungen an und wiesen damit einen Proportionalitätsfaktor κ nach, der Werte zwischen den von PERSSON und BUSH analytisch vorhergesagten annahm. Der Koeffizient reagierte nahezu unabhängig auf Änderungen im HURST-Exponenten H und der Querkontraktionszahl ν . Letzteres lässt darauf schließen, dass auch mit einfacheren Modellen korrekte Ergebnisse für den Kontakt zwischen rauen Oberflächen zu erzielen sind. Ob sogar ein auf vertikale Freiheitsgrade beschränktes, hierarchisches Modell ausreichend ist, wird folgend diskutiert.

Für die numerischen Simulationen wird ein hierarchisches Modell mit $128 * 128$ Teilchen in der untersten Schicht genutzt und dessen Kontakt mit selbstaffin fraktalen Oberflächen bei je vier verschiedenen Auflösungen

$$\langle \xi_n \rangle := \left\langle \frac{q_{1n}}{q_0} \right\rangle = \{ 8, 16, 32, 64 \} \tag{6.17}$$

untersucht; untere Grenzwellenzahl ist $q_0 = 2 \cdot \frac{2\pi}{L}$.

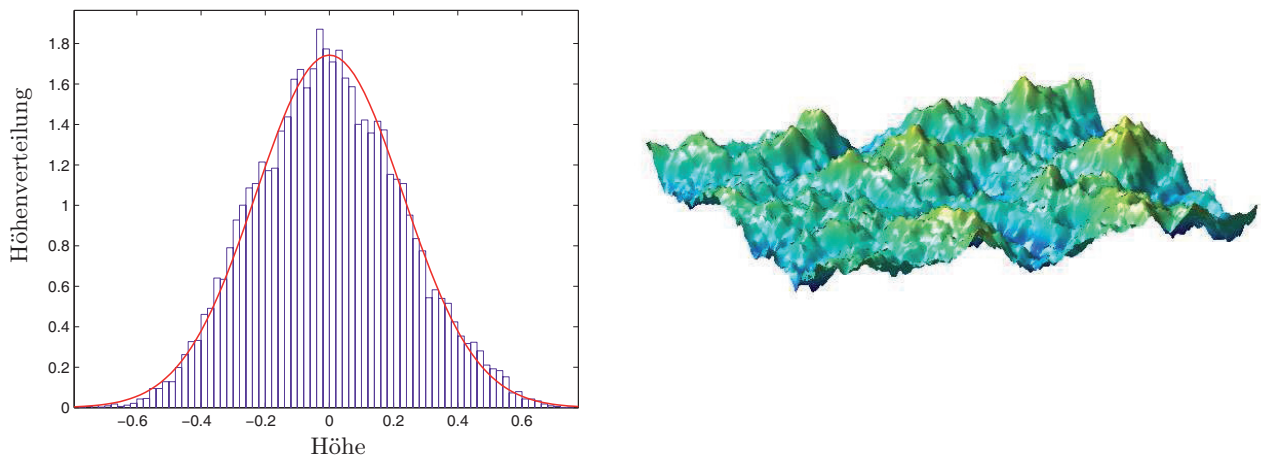


Abbildung 6.8: Numerisch erzeugte selbstaffine Oberfläche bei einer Auflösung $\xi = 64$ ($q_0 = 2 \cdot \frac{2\pi}{128\Delta x}$); Mittenrauwert $h_{\text{RMS}} \approx 0.23 \Delta x$. Linkerhand ist die zugehörige Verteilung der Höhen abgebildet.

Abbildung 6.8 zeigt eine beispielhafte selbstaffine Oberfläche bei höchster Auflösung und überhöhter Darstellung der z -Komponente, links daneben die Verteilung der Höhen inklusive einem fitting an die Normalverteilung nach GAUSS. Sämtliche Größen sind in Bezug zum Gitterabstand Δx zu sehen, so beträgt der Mittenrauwert $h_{\text{RMS}} \approx 0.23 \Delta x$.

6.4.1 Kontaktfläche vs. Normalkraft bei verschiedenen Auflösungen

Die Grafik links in Abbildung 6.9 gibt die numerischen Ergebnisse für den Verlauf der Kontaktfläche als Funktion der Normalkraft bei verschiedenen Auflösungen wieder. Wie erwartet, nimmt sie bei Berücksichtigung von Rauigkeiten auf einer kleineren Skala ab. Diesbezüglich stellte auch BORRIBRUNETTO [12] numerische Untersuchungen an, bediente sich dabei der GREEN-Funktionen für die Oberflächenverschiebungen. In seinem Fokus stand auch das Tangentialkontaktproblem, weshalb er vereinfachend für Dundurs' Konstante $\beta = 0$ annahm. Das hat aber genauso Auswirkungen auf den

hier vorliegenden reinen Normalkontakt, denn die tangentielle Verschiebung an der Oberfläche (nicht im Inneren) verschwindet; dies ist ein weiterer Aspekt, welcher unsere Modellannahme – Beschränkung auf vertikale Freiheitsgrade – unterstützt. BORRI-BRUNETTO erhielt ein *annähernd* lineares Verhalten zwischen P und A für kleine Normalkräfte unabhängig von der fraktalen Dimension. Die numerischen Resultate für verschiedene Auflösungen verglich PERSSON [86] mit seiner Theorie und stellte eine hervorragende Übereinstimmung der Steigungsverhältnisse fest. In Abbildung 6.9 links käme man sehr wohlwollend noch auf die Idee, die Graphen durch Geraden anzunähern; dass jenes doch nicht so einfach geht, veranschaulicht der Vergleich mit den theoretischen Voraussagen¹¹ – rechts im Bild.

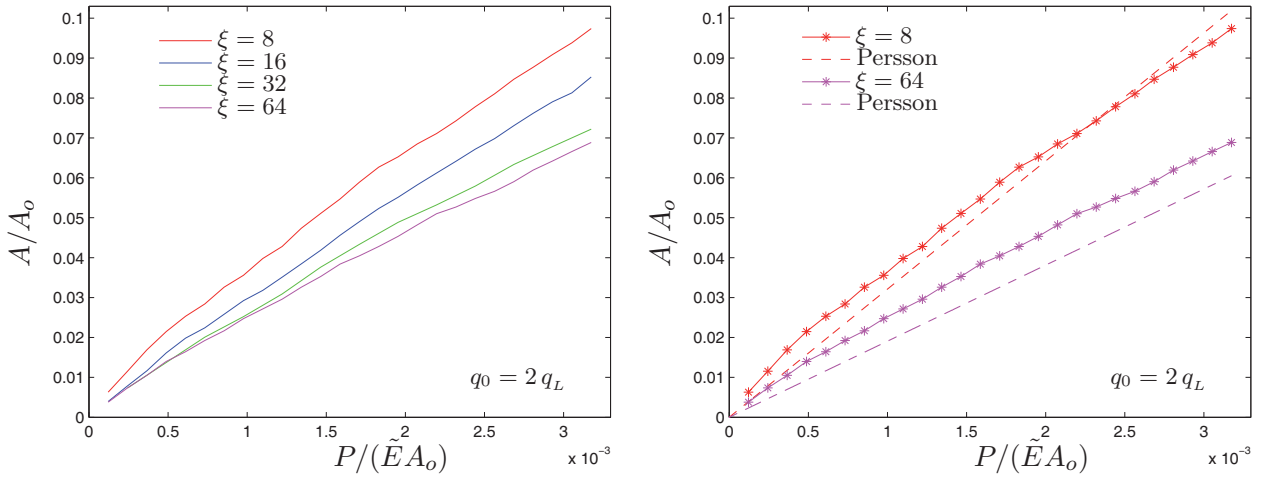


Abbildung 6.9: Reale Kontaktfläche A aufgetragen über die Normalkraft P in normierter Darstellung; links: vier verschiedene Auflösungen $\langle \xi_n \rangle = \{8, 16, 32, 64\}$, rechts: Vergleich der Ergebnisse für $\xi = 8$ und $\xi = 64$ mit der Theorie von PERSSON; $h_{\text{RMS}} \approx 0.23 \Delta x$, $H = 0.7$

In [124, 122] wird darauf aufmerksam gemacht, dass sich bei einer über einen kritischen Abstand Δz_{kr} definierten Kontaktbedingung kein linearer Zusammenhang auftut. Allerdings äußerte sich das dort verwendete (mehrdimensionale) Multiskalenmodell hinsichtlich des kritischen Abstandes als sehr empfindlich gegenüber Änderungen im Krümmungsradius beim HERTZschen Versuch, was bei dem hier genutzten (vereinfachten) Modell nicht der Fall war. Die Mehrzahl meiner Simulationen lieferte mit obigen vergleichbare Ergebnisse, d.h. auch hier erscheint die weggesteuerte Kontaktformulierung als unzureichend. Dass durchaus Resultate erzielt wurden, die die direkte Proportionalität $P \sim A$ wiedergeben, zeigt Abbildung 6.10. Im Beispiel erstreckt sich der lineare Bereich sogar über $A/A_o \approx 35\%$, fällt demnach viel zu groß aus. Die Kurvensteigung deckt sich hingegen hervorragend mit der Theorie von PERSSON (die beispielhafte Oberfläche weist deutliche Unterschiede zur Normalverteilung auf).

¹¹Dabei wurden die numerisch berechneten Steigungen der Oberfläche zugrundegelegt.

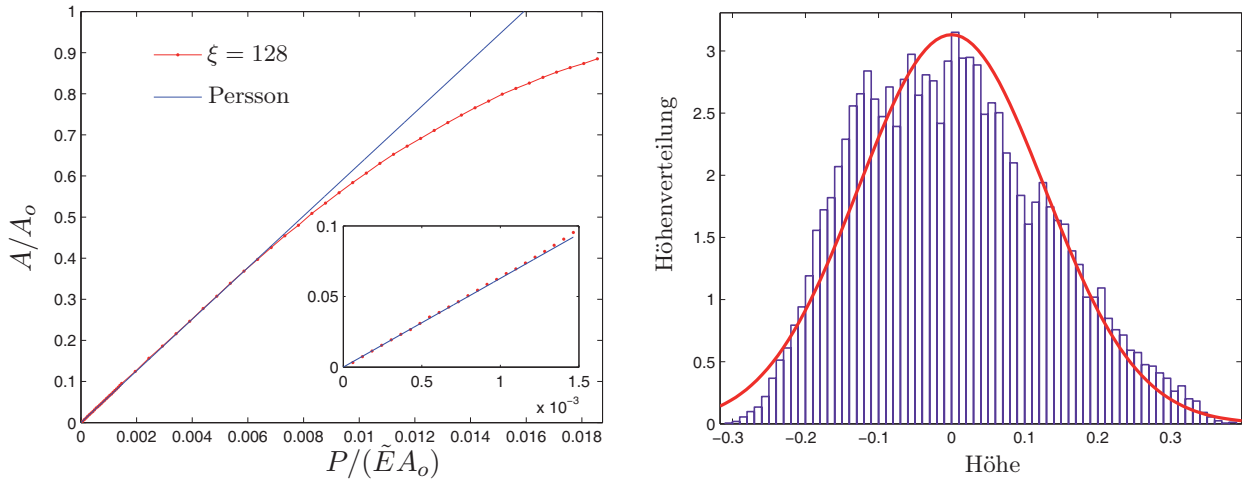


Abbildung 6.10: Zur Änderung der realen Kontaktfläche in Abhängigkeit der Normalkraft für eine numerisch erzeugte selbstaffine Oberfläche ($L = 128\Delta x$; $q_0 = 2\pi/L$; $\xi = 128$; $H = 0.7$; $h_{\text{RMS}} \approx 0.13 \Delta x$; $\nabla Z \approx 0.0254$).

Die Formulierung der Kontaktbedingung über einen kritischen Abstand hat sich als unzureichend erwiesen. Aus diesem Grunde greifen wir nachfolgend auf die Methode aus [124, 123] zurück, d.h. passen die Druckverteilung des sich durch den nominellen Druck $p_o := P/A_o$ ergebenden Gleichgewichtszustandes der Verteilung

$$\mathcal{P}(\sigma, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{G}}} \left(e^{-\frac{(\sigma-p_o)^2}{4\tilde{G}}} - e^{-\frac{(\sigma+p_o)^2}{4\tilde{G}}} \right) \quad (6.18)$$

bestmöglich an, wobei $\tilde{G}(\xi)$ der fit-Parameter ist (siehe Abbildung 6.11). Hat man jenen gefunden, so kann darüber die Kontaktfläche ermittelt werden

$$\frac{A}{A_o} \approx \frac{p_o}{\sqrt{\pi\tilde{G}}} \quad \text{für} \quad \frac{A}{A_o} \ll 1. \quad (6.19)$$

Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Druckverteilungen der zu den Verläufen aus Abbildung 6.9 gehörigen Oberflächen führt auf einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen Kraft und Kontaktfläche.

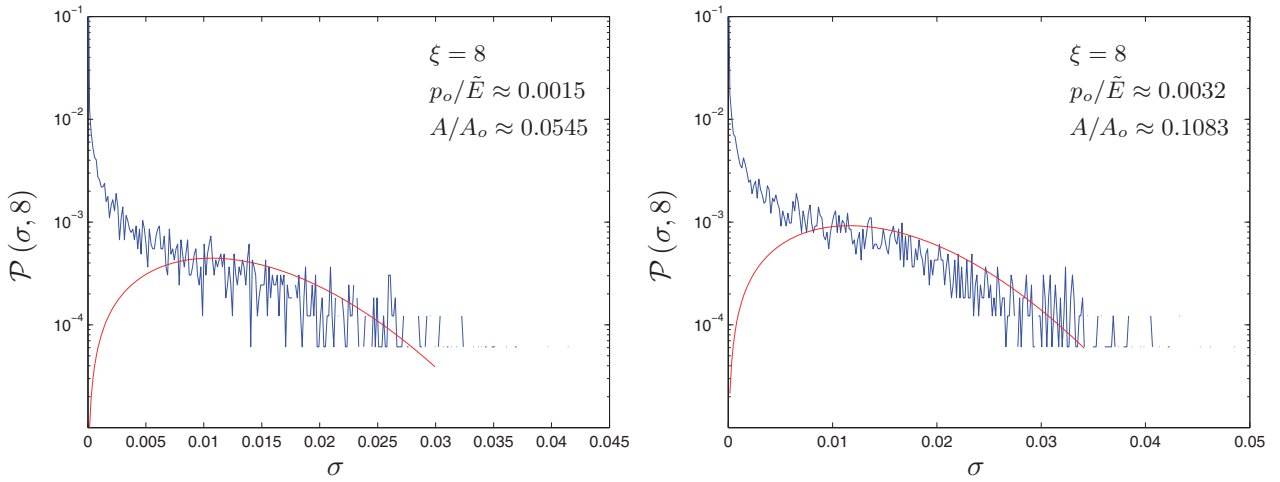


Abbildung 6.11: (Gesamt-) Druckverteilung für $\xi = 8$ bei zwei verschiedenen Belastungen inklusive des bestmöglichen Fits an Glg.(6.18).

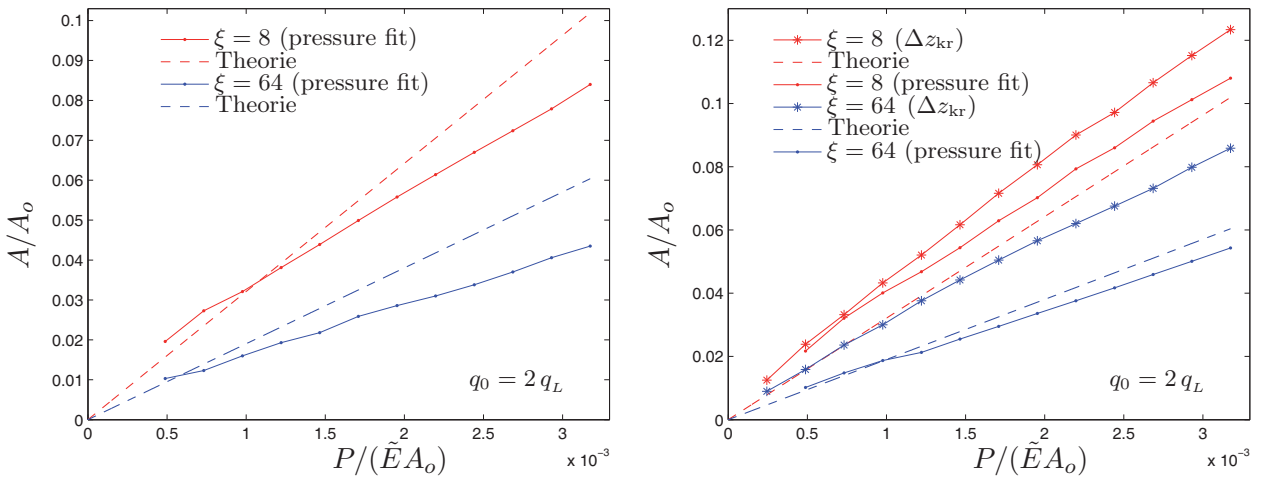


Abbildung 6.12: Reale Kontaktfläche A aufgetragen über die Normalkraft P in normierter Gestalt erzeugt durch bestmöglicher Fit der Gesamtdruckverteilung an Glg.(6.18); links und rechts handelt es sich um zwei selbstaffine Oberflächen mit gleichen statistischen Kennwerten $h_{\text{RMS}} \approx 0.23 \Delta x$, $\nabla Z_8 \approx 0.05, \nabla Z_{64} \approx 0.084$, $H = 0.7$, die dennoch auf unterschiedliche Ergebnisse führen!

Lediglich bei äußerst kleinen Kontaktflächenverhältnissen existieren Schwankungen; allerdings erscheint bei solchen die Anwendbarkeit (Güte) des Verfahrens ziemlich schwierig (fragwürdig), da nur wenige Punkte *effektiv* zum Verteilungsspektrum beisteuern. Besserung dürfte eine feinere Diskretisierung der untersten Modellschicht bringen¹², was jedoch die Zahl der Freiheitsgrade und damit die Rechenzeit trotz hierarchischer Struktur deutlich erhöht.

Je kleiner der zu untersuchende Oberflächenausschnitt ist, desto mehr Einfluss wird trotz gleicher statistischer Kennwerte die konkrete Topographie nehmen. Ein solcher Effekt ist in Abbildung 6.12 zu erkennen. Beide Grafiken beziehen sich auf Oberflächen mit gleichen Kenngrößen - Mittenrauwert und RMS-Steigung - aber unterschiedlicher Topographie. Rechterhand fallen die Kurvensteigungen erheblich größer aus; das gilt sowohl für die aus einer optimalen Anpassung der Druckverteilung

¹²In einem vergleichbaren Modell geht YANG [124] von 400*400 Teilchen in der Grundschicht aus, was in etwa dem Zehnfachen in unserem System entspricht.

resultierenden Verläufe als auch für diejenigen, bei welchen die Flächenberechnung aus einem kritischen Abstand hervorgeht. Obwohl leider nicht für alle Oberflächen erhältlich, ergaben sich für letztere sogar lineare Verhältnisse! Desweiteren fällt auf, dass die über die Druckverteilung gewonnenen Steigungen im Vergleich zu solchen aus der weggesteuerten Technik deutlich geringer sind. Eine prinzipielle Aussage mit Bezug auf die theoretischen Werte lässt sich jedoch nicht machen. Die Literatur sagt unabhängig vom verwendeten numerischen Verfahren (FEM, Molekulardynamik, GREEN-Funktionen) eine gegenüber der Theorie um 20-30 % zu große Kontaktfläche voraus [49, 123, 23]. Diesbezüglich lässt sich hier keine eindeutige Aussage treffen, was einmal mehr ein Indiz dafür ist, dass das zugrundegelegte Modell entweder in seiner prinzipiellen Struktur *zu einfach* gewählt ist oder aber die Resultate aufgrund der noch zu geringen Anzahl von Teilchen in der untersten Schicht verzerren. Um letzteren Fall ausschließen zu können, sollten Rechnungen mit einem mindestens um eine Schicht erweiterten hierarchischen System zukünftig erfolgen.

6.4.2 Mittlerer Abstand der kontaktierenden Oberflächen und Topographie

Bei Erhöhung des Anpressdrucks zweier in Kontakt stehender rauer Oberflächen vergrößert sich die reale Kontaktfläche, während der mittlere Abstand beider Oberflächen und damit auch der Raum zwischen ihnen abnimmt. Dies hat Auswirkungen auf zahlreiche Prozesse wie beispielsweise den Wärmetransport oder die Schmierung, auch wird dadurch die Dichtheit einer Verbindung [90] wesentlich bestimmt.

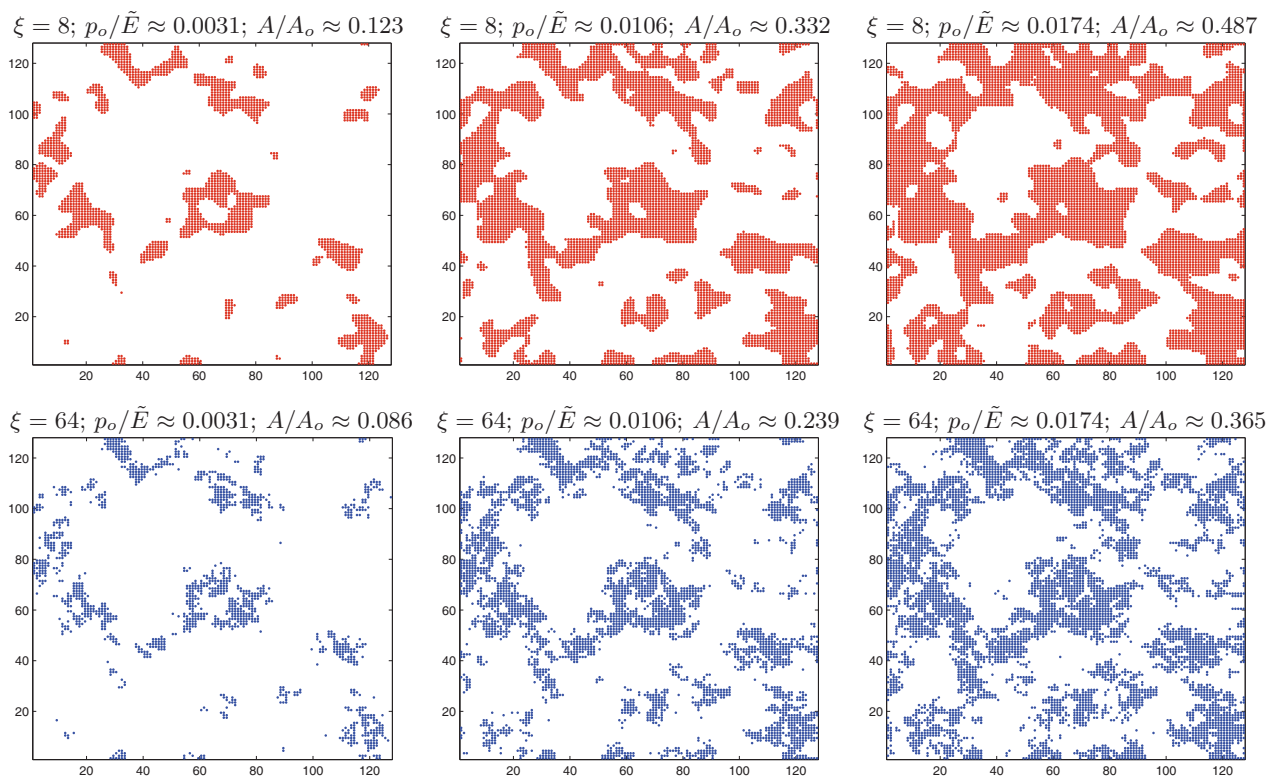


Abbildung 6.13: Topographie des Kontaktes zu unterschiedlichen Anpressdrücken für zwei verschiedene Auflösungen $\xi = 8$ und $\xi = 64$; untersucht wurden die Oberflächen des vorausgegangenen Abschnitts.

Die sogenannte *Perkolationsgrenze* gibt an, ab welchem kritischen Anpressdruck man von der Dichtheit eines Kontaktes ausgehen darf. Hier sind erstmalig alle Wege durch das Kontaktgebiet unterbro-

chen, was laut Theorie in etwa bei einem Flächenverhältnis von $A/A_o \approx 40\%$ der Fall ist. Selbstverständlich ist dieser Effekt skalenabhängig, denn bei gleichem Anpressdruck nimmt die Kontaktfläche auf einer kleineren Rauheitsskala ab, so dass eine Vielzahl von Kanälen durch das Kontaktgebiet hervortreten. Als Beispiel sei auf die Abbildung 6.13 verwiesen, welche zu drei unterschiedlichen Anpressdrücken die Topographie des Kontaktgebietes bei zwei verschiedenen Auflösungen aufzeigt. Die Perkolationsgrenze bei der geringeren Auflösung $\xi = 8$ ist bei einem kritischen (nominellen) Anpressdruck von $p_{o,kr} \approx 0.0174 \tilde{E}$ erreicht. Die zugehörige Kontaktfläche beträgt $A \approx 0.487 A_o$ (Teilabbildung oben rechts). Im Mittel ergab sich unabhängig von der Skala $A_{kr} \approx 0.46 A_o$, gegenüber der Theorie ein um gut 15 % zu großer Wert.

Bestätigt durch experimentelle Untersuchungen [8] leitet Persson [83] für kleine nominelle Kontakt- drücke die folgende Abhängigkeit zwischen Normalkraft P und mittlerem Abstand der Oberflächen \bar{u} her

$$P(u) \sim e^{-\bar{u}/u_o}, \quad (6.20)$$

wobei im Falle von selbstaffinen Oberflächen $u_o = c h_{\text{RMS}}$ mit $c \approx 0.4$ gilt. Ergebnisse numerischer Simulationen mit dem mehrfach zitierten molekulardynamischen Modell von YANG stehen in sehr gutem Einklang mit obiger Theorie, zumindest im Bereich $0.2 < \bar{u}/h_{\text{RMS}} < 2$. Außerhalb sind deutliche Abweichungen vom exponentiellen Charakter sichtbar, die einerseits mit der zu geringen Anzahl von Kontaktpunkten bei kleinen Anpressdrücken begründet werden, andererseits kann das LENNARD-JONES Potenzial nur bedingt den theoretisch angenommenen Unendlichkeitssprung bei $\bar{u} = 0$ abbilden. Beide Aussagen gelten gleichermaßen für das hier benutzte hierarchische System, dessen unterste Schicht sogar noch weniger Teilchen umfasst, die über eine exponentiell mit dem Abstand fallende Kraft mit dem Grundkörper wechselwirken. Dass ein *großes* molekulardynamisches Modell nicht notwendig ist, um obigen Zusammenhang zu beschreiben, zeigen die Ergebnisse mit dem einfachen hierarchischen Modell - siehe Abbildung 6.14. Im Intervall $0.4 < \bar{u}/h_{\text{RMS}} < 1.5$ verlaufen beide Kurven exponential; der Koeffizient c nimmt in etwa den Wert $c \approx 0.44$ an.

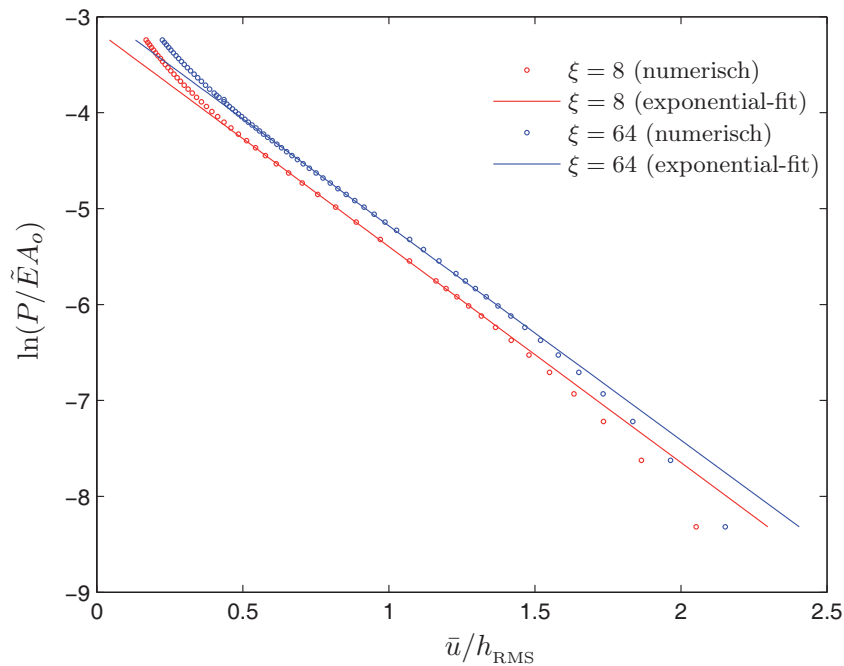


Abbildung 6.14: Anpressdruck als Funktion der relativen Annäherung der beiden Oberflächen bei unterschiedlichen Rauheitsskalen ($\xi = 8$, $\xi = 64$).

6.5 Ergebnisdiskussion

In den vorausgegangenen Berechnungen wurde der *Kontakt eines Teilchens* zunächst durch das Unterschreiten eines kritischen Abstandes Δz_{kr} zur Oberfläche des Grundkörpers definiert, welcher aus einer Anpassung an den HERTZschen Kontakt hervorging. Auf Änderungen im Krümmungsradius über eine 10er Potenz hatte sich die Kontaktbedingung als nahezu unempfindlich erwiesen. Die Mehrzahl von untersuchten rauen Oberflächen auf verschiedenen Skalen führte diesbezüglich jedoch nicht auf die theoretisch gestützte Proportionalität $P \sim A$ für $A/A_o \ll 1$. Daher erfolgte im weiteren die Ermittlung der realen Kontaktfläche durch bestmögliche Anpassung der Gesamtdruckverteilung an jene aus der Theorie von Persson [124]. Damit konnte eine (annähernde) Linearität zwischen Normalkraft und realer Kontaktfläche erzielt werden, allerdings differierten die Kurvensteigungen bei Oberflächen mit gleichen statistischen Kennwerten ($H, h_{\text{RMS}}, \nabla Z$) deutlich. Auch reagiert das Verfahren relativ empfindlich bei äußerst kleinen Kontaktflächen. Das könnte mit der absoluten Menge der kontaktierenden Teilchen zusammenhängen (diese ist zu gering). Daher sollten Rechnungen mit einem größeren System anschließen (z.B. $256 * 256$ Teilchen in der untersten Schicht), wodurch ebenso die skalenabhängigen Steigungen je gegen einen festen Wert konvergieren müssten.

Die Perkulationsgrenze wird im Modell erst ab einem durchschnittlichen (skalenunabhängigen) Wert von $A/A_o \approx 0.46$ erreicht, während Theorien sowie numerische Rechnungen ca. 0.4 angeben. Inwieweit dieses noch ein annehmbares Ergebnis ist, vermag ich schwer einzuschätzen, da selbst ein *banales Schnittverfahren* durch die Oberfläche ein Verhältnis $A/A_o = 0.5$ vorhersagt.

In sehr gutem Einklang mit der Theorie von PERSSON stehen hingegen die erzielten Resultate zur Abhängigkeit zwischen Nominaldruck und mittlerem Abstand der rauen Oberflächen; hier kann auf ein *größeres Multiskalenmodell* verzichtet werden. Erst neue Ergebnisse mit einem um eine Schicht erweiterten System geben Aufschluss darüber, ob man auch in den anderen Fällen das deutlich größere Multiskalenmodell verdrängen kann. Unter anderem sollte dazu die Kontaktfläche gegenüber der Theorie um 20-30 % größer ausfallen, ein Bereich, den verschiedene numerische Verfahren [23, 123, 50] belegen.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Heutzutage sind numerische Simulationen in der Kontaktmechanik und Reibungsphysik – wie auch in allen anderen naturwissenschaftlichen Bereichen – nicht mehr wegzudenken. Sie dienen hauptsächlich der Auslegung und Optimierung tribologischer Systeme von der Nano- bis zur Megaskala. Aufgrund der Vielzahl verschiedener Phänomene wie Adhäsion, Schmierung, Rissentstehung und -ausbreitung, Verschleiß, elastoplastische Deformation sowie des Mehrskalencharakters können sich Tribosysteme als äußerst komplex erweisen, so dass man trotz leistungsfähiger Rechner schnell an deren Grenzen stößt. Aus diesem Grunde müssen sinnvolle Vereinfachungen her, die aus der analytischen Erfassung des jeweiligen Problems hervorgehen können. Jenem Prinzip genügend bestand die Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit darin, *dreidimensionale Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension abzubilden*. Vom gewöhnlichen abweichend wurde zusätzlich die *Exaktheit der Abbildung* gefordert. Damit könnte ein dreidimensionales Original ohne Verlust jeglicher Information in ein sehr viel einfacheres Ersatzmodell (niedrigerer Dimension) überführt werden.¹ Das formulierte Ziel darf für **konforme und kontraforme Normalkontakte mit und ohne Adhäsion** zweifelsohne als erfüllt angesehen werden. Sämtliche dazu erforderlichen analytischen Beweisführungen wurden erbracht. Insbesondere soll folgendes festgehalten werden:

Jedes reibungsfreie Normalkontaktproblem eines beliebig geformten axialsymmetrischen Indenters mit dem elastischen Halbraum lässt sich stets auf ein eindimensionales Modell abbilden. Das Ersatzsystem liefert *exakt* die dreidimensionalen Zusammenhänge zwischen Normalkraft P , Eindringtiefe δ und Kontaktradius a . Dazu ist lediglich die Oberflächenform des Originals durch einen konstanten Faktor zu modifizieren.²

Die Kontaktspannungen können nach Gleichung (2.81) aus der modifizierten Geometrie durch ABEL-Rücktransformation gewonnen werden. Eine physikalische Interpretation solcher, über die WEBER-Transformierte, ist auf den Seiten 28-31 zu finden. Hier wird auch gezeigt, dass die für den HERTZschen Kontakt mögliche, sehr effiziente Reformulierung von Spannungen nach V.L. POPOV und GEIKE [33] nur auf einige Sonderfälle übertragbar ist. In Erweiterung ihrer Idee wird allerdings eine Alternative vorgestellt, die zunächst eine Entwicklung der Ersatzgeometrie in besondere Wurzelausdrücke erfordert. Der anschließende Weg bishin zu den Normalspannungen ist äußerst elegant und steht der einst von G.Ia. POPOV [89] veröffentlichten Methode in keinerlei Hinsicht nach. G.Ia. POPOV drückte die reale Oberflächenform über LEGENDRE-Polynome aus und konnte daraus sehr einfach auf die Spannungsverteilung schließen. Beide Theorien sind jedoch nur auf Potenzfunktionen mit geraden (natürlichen) Exponenten anwendbar. Einschließlich eines konformen Kontaktes als Anwendungsbeispiel werden sie in Anhang C gegenübergestellt.

¹Durch sinnvolle (auch näherungsweise gültige) Annahmen könnte das Ersatzmodell sogar noch einfacher und dadurch effizienter gestaltet werden.

²Der Faktor wurde mit κ bezeichnet, dessen Definition ist auf Seite 17, Gleichung (2.48) gegeben.

Aus den Forminvarianzen ebener und axialsymmetrischer Systeme hinsichtlich der Bestimmungsgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen im Inneren wurde basierend auf der Theorie der Altmeister ein **Korrespondenzprinzip** entwickelt, das für den Normal- und *axialsymmetrischen Tangentialkontakt*³ gilt. Solches gestattet die **exakte Umrechnung zwischen den Feldgrößen ebener und axialsymmetrischer Systeme**. Dazu sind zunächst die Randlasten zu transformieren und auf eine Halbscheibe aufzuprägen, deren innere Spannungen und Verschiebungen im Anschluss einer ABEL-Rücktransformation zu unterziehen sind. Diese Linienintegrationen stellen einen Mehraufwand dar, der große Vorteil allerdings besteht in der Reduktion einer vollen Dimension. Die Gewichte beider müssen zukünftig gegenübergestellt werden. Es sei angemerkt, dass möglicherweise durch eine Art Prinzip der lokalen Nachbarschaft der Integrationsaufwand verringert werden kann. Trotz der analytischen Beweisführung wurde das Korrespondenzprinzip numerisch am Beispiel der Indentierung des Halbraums durch einen flachen zylindrischen, einen konischen und einen sphärischen Stempel getestet. Abgesehen von minimalen Schwankungen bedingt durch die numerische Integration stimmten die inneren Felder exakt mit den analytisch gegebenen überein; das galt selbsterklärend auch für die im Rahmen elastoplastischer Untersuchungen wichtigen Vergleichsspannungen. Am Ende von Kapitel 2 wird ein Dimensionsreduktionsalgorithmus aufgelistet, der das eindimensionale Federmodell an das zweidimensionale System koppelt und so die exakte Abbildung sämtlicher den axialsymmetrischen Kontakt charakterisierender Größen (P , δ , a , $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{S}(\mathbf{x})$) verspricht.

Die **Erweiterung der Reduktionsmethode auf den adhäsiven Kontakt** ist vollständig gelungen. Als Adhäsionstheorie wurde dabei die JKR-Theorie verwendet. Wiederum können *beliebig geformte* axialsymmetrische Kontakte mit Adhäsion exakt abgebildet werden. Das Zusammenspiel des Studiums der Literatur von SNEDDON [107], des Originalpapers zur JKR-Theorie [55] sowie der bruchmechanischen Analogien von MAUGIS [66] führte zu einer *genial einfachen* Umsetzung (siehe Abschnitt 3.2).⁴

Leider musste ich feststellen, dass die Erweiterung der JKR-Theorie auf beliebig geformte Indenter bereits YAO und GAO [126] 2005 gelungen ist. Vollständige Stabilitätsuntersuchungen unter „fixed-load“- und „fixed-grips“-Bedingungen blieben sie schuldig. Solche habe ich nachgeholt und in Tabelle 3.1 auf Seite 60 zusammengefasst.

Die exakte Abbildung des adhäsiven Kontaktes bedeutet sicherlich eine Bereicherung für das Simulationsverfahren von POPOV und GEIKE. Ebenso kann die Modellierung des axialsymmetrischen, konformen Kontaktes biologischer Strukturen nun sehr viel einfacher und ohne Verlust an Genauigkeit erfolgen – bei der Aktualität der Thematik und der Komplexität der Strukturen bestimmt von Interesse.

Die **Kompatibilität des Korrespondenzprinzips mit dem adhäsiven Kontakt** wurde an einem numerischen Beispiel untermauert. Jenes kann sogar auf **geschichtete und inhomogene Halbräume** angewendet werden!

Alle oben vorgestellten Dimensionsreduktionen bilden dreidimensionale Kontakteigenschaften *exakt* ab. Sie sind aus analytischen Betrachtungen heraus entstanden und können daher in jedwede Simulationsverfahren (kommerzielle Software) implementiert werden. Eine Erweiterung auf die exakte Abbildung der globalen, zeitabhängigen Größen $P(t)$, $\delta(t)$, $a(t)$ im Falle von **viskoelastischen Materialien** scheint sehr einfach realisierbar, wenn man das Konzept von RADOK [97] verfolgt. Demnach gehen die Lösungen des viskoelastischen aus denen des reinen elastischen Kontaktes hervor, nur die elastischen Parameter müssen durch einen entsprechenden Integraloperator ausgetauscht werden.

³Darunter fällt leider nicht der übliche Tangentialkontakt nach MINDLIN, da dort die Tangentialspannungen nur in eine Richtung weisen!

⁴Lediglich die Überlagerung einer Starrkörpertranslation musste beachtet werden.

Grundlegende Überlegungen eingangs von Kapitel 4 führten zum Schluss, dass die Verschiebungen innerhalb einer inhomogenen Halbscheibe durch geeignete Wahl eines tiefenabhängigen elastischen Moduls derart regelbar sind, dass sich qualitativ der dreidimensionale Zusammenhang $u_i \sim 1/r$ einstellt. Das Charakteristikum der 2D-Spannungsgrößen lässt sich hingegen dadurch nicht beeinflussen! Das schließt die Möglichkeit aus, jemals die axialsymmetrischen Felder direkt aus einer inhomogenen Halbscheibe abgreifen zu können.

Da die Oberflächenlinie der GIBSON-Halbscheibe wie eine WINKLER-Bettung reagiert, ergeben sich beim Eindruck mit dem modifizierten Stempel die exakten dreidimensionalen P - δ - a Relationen. Die Spannungen aber nicht Verschiebungen in einer linear-inhomogenen, inkompressiblen Halbscheibe sind identisch mit jenen im homogenen, ebenen Medium, wodurch mit dem Korrespondenzprinzip zumindest die Spannungskomponenten σ_{zz} und τ_{rz} exakt abbildbar sind. Für die Reproduzierbarkeit aller den Kontakt ausmachenden dreidimensionalen Größen eignet sich das ebene GIBSON-Medium meines Erachtens nicht; eine weiterführende in der Analytik des Problems verborgene Idee möchte ich nicht ausschließen. Aufbauend auf einer solchen konnte ich beispielsweise nachweisen, dass der Quotient aus Haft- und Gesamtkontaktbreite c/a für den 2D-Tangentialkontakt zwischen einem starren Zylinder und einem *linear-inhomogenen Grundkörper* mit dem der Kontaktradius des tangentialen Kontaktes einer starren Kugel auf einem *homogenen elastischen Halbraum* übereinstimmt.

Ursprünglich sollten in Kapitel 5 verschiedene zweidimensionale elastische Gittermodelle hinsichtlich ihrer Eigenschaft untersucht werden, das Verhalten des zweidimensionalen, isotropen Kontinuums mit zwei unabhängigen elastischen Parametern adäquat abzubilden, dabei analytische Betrachtungen und numerische Anwendung gepaart werden. Letztere mussten leider ausbleiben, da sich aufgrund der Randproblematik ebener Systeme bereits ein zu großer Fehler einstellt, der weitere Untersuchungen als nicht sinnvoll einstuft. Zwischen BORN-, KIRKWOOD- und MCA-Modellen wurde unterschieden und auf Grundlage eines quadratischen Gitters deren Vor- und Nachteile aufgezeigt. Speziell im BORN-Modell tritt in der *Formänderungsenergie* ein Anteil auf, der *gegenüber infinitesimalen Starrkörperrotationen nicht invariant* ist. Dessen Einfluss zu studieren, sehe ich als eine interessante zukünftige Aufgabe an.

Zur numerischen Simulation des Kontaktes selbstaffiner Oberflächen wurde ein hierarchisches System⁵ entwickelt, welches gegenüber einem homogen-diskretisierten, dreidimensionalen elastischen Block eine weitaus geringere Anzahl unabhängiger Bewegungsmöglichkeiten besitzt. Bedingt durch die Tatsache, dass das Abklingen von Inhomogenitäten im Deformationsfeld an die Wellenlänge der Rauigkeit gekoppelt ist, darf auf eine feine Diskretisierung im Inneren verzichtet werden. Hier wurde die Teilchenanzahl von Schicht zu Schicht je auf ein Viertel reduziert, gleichzeitig der Schichtabstand verdoppelt und eine Beschränkung auf vertikale Freiheitsgrade vorgenommen. Es galt zu untersuchen, inwieweit man mit diesem extrem vereinfachten Modell noch angemessene Resultate erzielen kann. Bei $128 * 128$ Teilchen in der Oberflächenschicht lieferte das Modell folgende Ergebnisse:

Die relative Annäherung der Oberflächen mit zunehmendem Nominaldruck zeigte qualitativ und quantitativ den von Theorie und Experiment vorhergesagten exponentiellen Verlauf.

Die Abhängigkeit der realen Kontaktfläche von der Normalkraft für $A/A_o \ll 1$ wurde unter Berücksichtigung zweier verschiedener Kontaktdefinitionen untersucht. Unter Verwendung eines kritischen Kontaktabstandes ergaben sich zum Teil lineare aber auch nichtlineare Zusammenhänge. Mit dem Verfahren von PERSSON und YANG [124] – bestmöglicher Fit der Druckverteilung an eine analytische Vorgabe – konnte eine (annähernde) Linearität sichergestellt werden. Bei äußerst kleinen (aber dennoch relevanten) Kräften ist die Anwendbarkeit des Verfahrens zweifelhaft.

Für verschiedene Oberflächen mit gleichen statistischen Kennwerten differierten die P - A Verläufe in ihrer Steigung zum Teil sehr stark und verhinderten so einen effektiven Vergleich mit der Theorie bzw.

⁵Es ist ebenso als Modell für real-diskrete Strukturen geeignet.

den Ergebnissen anderer numerischer Simulationen. Daher sollten Rechnungen mit einem um eine Schicht vergrößerten System (256*256 Teilchen) anschließen. Bei zu vermutender Konvergenz können dann repräsentative Aussagen über die Eignung des hierarchischen Systems zur Kontaktsimulation getroffen werden, zumal eine Vielzahl unterschiedlicher Verfahren einheitliche Resultate zeigen. Die Ergebnisse hinsichtlich der Perkulationsgrenze sind schwer einzuordnen.

Anhang A

Differenzialoperatoren und Integraltransformationen

A.1 Differenzialoperatoren

Die Darstellung des LAPLACE-Operators in Zylinderkoordinaten r, φ, z lautet

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (\text{A.1})$$

bei Axialsymmetrie mit der z -Achse als Symmetrieachse vereinfacht sich dieser zu

$$\Delta_A := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Integraltransformationen

Zwischen den HANKEL-Transformationen spezieller Ableitungen existieren mitunter wichtige Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \left[r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \{ r^{1-n} f(r) \}; \xi \right] &= -\xi \mathcal{H}_{n-1} [f(r); \xi] \\ \mathcal{H}_n \left[r^{-n-1} \frac{\partial}{\partial r} \{ r^{1+n} f(r) \}; \xi \right] &= \xi \mathcal{H}_{n+1} [f(r); \xi]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Das Aufsuchen von Verbindungen zwischen HANKEL- und FOURIER-Sinus- bzw. FOURIER-Cosinus-Transformation hat sich für die Anwendung in der Elastizitätstheorie als sinnvoll erwiesen. Definiert man die FOURIER-Sinus- bzw. die FOURIER-Cosinus-Transformierte einer Funktion $f(t)$ durch

$$\begin{aligned} f_s(\xi) &\equiv \mathcal{F}_s[f(t); t \rightarrow \xi] := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(\xi t) dt \\ f_c(\xi) &\equiv \mathcal{F}_c[f(t); t \rightarrow \xi] := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(\xi t) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

so besitzen folgende auch als ABEL-Transformationen 1. und 2.Art bekannte Beziehungen Gültigkeit

$$\mathcal{A}_1[f(t); \varrho] := \mathcal{H}_0[\xi^{-1} f_c(\xi); \varrho] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\varrho} \frac{f(t)}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}} dt \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{A}_2[f(t); \varrho] := \mathcal{H}_0[\xi^{-1} f_s(\xi); \varrho] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 - \varrho^2}} dt \quad \text{wobei} \quad \varrho > 0. \quad (\text{A.6})$$

Die zugehörigen Umkehrtransformationen gehorchen den Gesetzmäßigkeiten

$$\mathcal{A}_1^{-1}[f(t); \varrho] = \frac{\partial}{\partial \varrho} \mathcal{A}_1[tf(t); \varrho] = \varrho \mathcal{A}_1[\dot{f}(t); \varrho] \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{A}_2^{-1}[f(t); \varrho] = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \mathcal{A}_2[tf(t); \varrho] = -\varrho \mathcal{A}_2[\dot{f}(t); \varrho]; \quad (\text{A.8})$$

nützliche Verknüpfungen sind

$$\mathcal{A}_2 \{ t \mathcal{H}_0 [f(\varrho); t]; x \} = \mathcal{F}_c [f(\varrho); x] \quad (\text{A.9})$$

$$x \mathcal{A}_2 \{ \mathcal{H}_1 [f(\varrho); t]; x \} = \mathcal{F}_s [f(\varrho); x]. \quad (\text{A.10})$$

Sei nun

$$\hat{g}(\xi) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 g(t) \cos(\xi t) dt \quad (\text{A.11})$$

dann gelten in Anlehnung an Gleichung (A.5)

$$\mathcal{H}_0[\xi^{-1} \hat{g}(\xi); \varrho] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\min(\varrho, 1)} \frac{g(t)}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}} dt \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{H}_0[\hat{g}(\xi); \varrho] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} H(1 - \varrho) \left\{ \frac{g(1)}{\sqrt{1 - \varrho^2}} - \int_{\varrho}^1 \frac{\dot{g}(t)}{\sqrt{t^2 - \varrho^2}} dt \right\}, \quad (\text{A.13})$$

worin $H(x)$ die HEAVISIDE-Funktion darstellt.

Aus einer Reihenentwicklung ist der folgende funktionale Zusammenhang

$$\cos(t\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} t \xi J_{-\frac{1}{2}}(t\xi) \quad (\text{A.14})$$

leicht nachvollziehbar und unterstützt die Gültigkeit der integralen Beziehung

$$\mathcal{F}_c[f(t); \xi] = \xi^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}[t^{-\frac{1}{2}} f(t); \xi], \quad (\text{A.15})$$

die im Rahmen der Auswertung von Dualintegralgleichungen für ebene Probleme der Elastizität sinnvoll ist. Dabei wird u.a. auch die MELLIN-Transformation bzw. ihre Inversion in Anspruch genommen

$$f_{\mathcal{M}}(\xi) \equiv \mathcal{M}[f(t); \xi] := \int_0^{\infty} f(t) t^{\xi-1} dt = \mathcal{F} \left(\frac{\xi - c}{i} \right)$$

$$f(t) \equiv \mathcal{M}^{-1}[f_{\mathcal{M}}(\xi); t] := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_{\mathcal{M}}(\xi) t^{-\xi} d\xi. \quad (\text{A.16})$$

Bei der Bestimmung von Eindringtiefe und Kontaktkraft für einen Indenter mit einem Polynom n -ten Grades als Formfunktion hat sich nachfolgendes Integral als Hilfe erwiesen

$$\int_0^t \frac{r^{1+k}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{k}{2} + 1)}{2 \Gamma(\frac{3+k}{2})} t^{1+k}; \quad (\text{A.17})$$

zudem wird Gebrauch von $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ sowie den Zusammenhängen

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (\text{A.18})$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad (\text{A.19})$$

gemacht. Weitere Integrationen von Bedeutung sind:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{\alpha+1}(\theta) \cos(\beta\theta) d\theta = \frac{2^{-1-\alpha} \pi \Gamma(2 + \alpha)}{\Gamma\left(\frac{3+\alpha-\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3+\alpha+\beta}{2}\right)} \quad (\text{A.20})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{\alpha+1}(\theta) \sin(\beta\theta) d\theta = 0. \quad (\text{A.21})$$

Anhang B

Zum zweidimensionalen Kontaktproblem

B.1 Herleitung der integralen Bestimmungsgleichungen für die Feldgrößen

In Kapitel 2.3.2 wurde erwähnt, dass ein ebenes Problem im Rahmen der klassischen Elastizitätstheorie auf die Lösung der biharmonischen Gleichung

$$\Delta\Delta\Phi(x, y) = 0$$

zurückgeführt werden kann. In Anlehnung an die Definitionen (A.4) werden FOURIER-Hin- und -Rücktransformation in der Formulierung

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda, y) &\equiv \mathcal{F}[f(x, y); x \rightarrow \lambda] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\lambda x} dx \\ f(x, y) &\equiv \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(\lambda, y); \lambda \rightarrow x] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

in der Folge genutzt. Angewandt auf die Bipotenzialgleichung ergibt sich

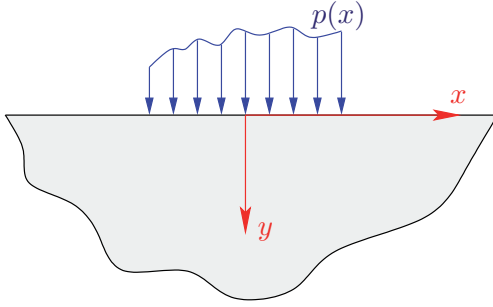
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda^2\right)^2 \tilde{\Phi}(\lambda, y) = 0, \quad (\text{B.2})$$

deren allgemeine Lösung

$$\tilde{\Phi}(\lambda, y) = (A + By)e^{-|\lambda|y} + (C + Dy)e^{|\lambda|y} \quad (\text{B.3})$$

leicht nachvollziehbar ist. Die Konstanten hinsichtlich der Ortskoordinate y sind Funktionen der Bildvariable λ und müssen wiederum den Randbedingungen genügen. Da in dieser Arbeit stets die Anwendung der Halbraumtheorie vorausgesetzt wird, kann der zweite Lösungsteil nicht auftreten, denn sämtliche Spannungen im Unendlichen streben gegen Null¹. Die Bestimmung der verbleibenden Koeffizienten ist an die Spannungsrandbedingungen geknüpft – ersichtlich aus Abbildung B.1.

¹Im Gegensatz zur axialsymmetrischen Belastung werden bei ebenen Problemen die Verschiebungen im Unendlichen nicht verschwinden; daher werden häufig Relativverschiebungen gegenüber einem Fixpunkt der Momentankonfiguration angegeben!



$$\begin{aligned}\sigma_{yy}(x, y = 0) &= -p(x) \\ \tau_{yx}(x, y = 0) &= 0\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Abbildung B.1: Normalspannungen auf einem halbunendlichen zweidimensionalen elastischen Medium.

Für die FOURIER-Transformierte der AIRYSchen Spannungsfunktion nach Anpassung an (B.4) folgt

$$\tilde{\Phi}(\lambda, y) = \frac{\tilde{p}(\lambda)}{\lambda^2} (1 + |\lambda|y) e^{-|\lambda|y}, \quad (\text{B.5})$$

wobei $\tilde{p}(\lambda)$ die Transformierte der Normaldruckverteilung $p(x)$ darstellt. Mit Hilfe der Beziehungen (2.63) können zunächst die Spannungen und daraus die Verschiebungen ermittelt werden. Die Berechnung ist in den Büchern von HAHN [42] bzw. SNEDDON [105] detailliert aufgezeigt, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen wird; die Integralgleichungen für die Feldgrößen lauten

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) \tilde{p}(\lambda) e^{-|\lambda|y - i\lambda x} d\lambda \\ \sigma_{yy} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|y) \tilde{p}(\lambda) e^{-|\lambda|y - i\lambda x} d\lambda \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y \tilde{p}(\lambda) e^{-|\lambda|y - i\lambda x} d\lambda \\ u_x &= -\frac{1 + \nu}{E} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\lambda)}{\lambda} (1 - 2\nu - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y - i\lambda x} d\lambda \\ u_y &= \frac{1 + \nu}{E} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\lambda)}{|\lambda|} [2(1 - \nu) + |\lambda|y] e^{-|\lambda|y - i\lambda x} d\lambda.\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

B.2 Lösung von Dualintegralgleichungen

Im Rahmen einer Anwendung der HANKEL-Transformation zur Lösung von Randwertproblemen können diese häufig auf zwei gekoppelte Integralgleichungen zurückgeführt werden, welche die folgende Gestalt besitzen

$$\int_0^{\infty} \xi^k f(\xi) J_m(t\xi) d\xi = g(t) \quad \text{für} \quad 0 < t < 1 \quad (\text{B.7})$$

$$\int_0^{\infty} f(\xi) J_m(t\xi) d\xi = 0 \quad \text{für} \quad t > 1. \quad (\text{B.8})$$

Der Aufwand reduziert sich dadurch auf das Auffinden der Funktion $f(\xi)$ bei gegebenem $g(t)$. Auf der Grundlage der MELLIN-Transformation (A.16) schuf TITCHMARSH [116] einen formalen Lösungsweg; in einer durch BUSBRIDGE [17] modifizierten Fassung lautet das Ergebnis

$$f(\xi) = \frac{2^{-\frac{k}{2}} \xi^{-k}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})} \left[\xi^{1 + \frac{k}{2}} J_{m + \frac{k}{2}}(\xi) \int_0^1 t^{m+1} (1-t^2)^{\frac{k}{2}} g(t) dt + \int_0^1 u^{m+1} (1-u^2)^{\frac{k}{2}} \int_0^1 g(yu) (\xi y)^{2 + \frac{k}{2}} J_{m+1 + \frac{k}{2}}(\xi y) dy du \right]. \quad (\text{B.9})$$

Die Gültigkeit der Gleichung (B.9) ist dabei auf $k > -2$ und $-m - 1 < k - \frac{1}{2} < m + 1$ beschränkt.

Anhang C

Ergänzungen zum axialsymmetrischen Kontaktproblem

C.1 Darstellung der realen Oberflächenverschiebung über verallgemeinerte LEGENDRE-Polynome

Die Verschiebungsformeln, die Boussinesq einst für die Einzelkraft auf einem elastischen Halbraum ableitete [13], sind auch für die Oberflächenpunkte bei ($z = 0$) gültig. Danach ergibt sich für die Normalverschiebung eines Punktes im Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der Angriffsstelle der Last P

$$u_z(r, z = 0) = \frac{P}{2\pi G} \frac{1 - \nu}{r}. \quad (\text{C.1})$$

Die Fundamentallösung (C.1) gepaart mit dem Superpositionsprinzip ermöglicht nun gerade die Erweiterung auf eine beliebige Spannungsverteilung an der Oberfläche, welche bei Verwendung von Zylinderkoordinaten s, φ bzw. $\theta := \varphi/2$ die folgende Gestalt annimmt

$$\begin{aligned} u_z(r, z = 0) &= \frac{1 - \nu}{2\pi G} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{sp(s)}{\sqrt{(s \cos \varphi - r)^2 + s^2 \sin^2 \varphi}} ds d\varphi \\ &= \frac{2(1 - \nu)}{\pi G} \int_0^a \frac{sp(s)}{s + r} \text{K} \left(\frac{2\sqrt{rs}}{s + r} \right) ds \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\text{mit} \quad \text{K}(x) := \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \theta}} d\theta.$$

Die Radialkoordinate r misst dabei den Abstand des betrachteten Punktes vom Ursprung (zugleich Zentrum des Kontaktes) und $\text{K}(\cdot)$ kennzeichnet das *vollständige elliptische Integral 1. Art*. In der Literatur [89] wurde gezeigt, dass (C.2) geschlossen lösbar ist, wenn die Spannungsverteilung über verallgemeinerte LEGENDRE Polynome $L_{2n} \left(x = \sqrt{1 - \bar{r}^2} \right)$ ausgedrückt wird. Nachstehend ist sowohl deren allgemeine Definition als auch eine daraus resultierende nützliche Rekursionsformel angegeben

$$L_m(x) := \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \quad (\text{C.3})$$

$$L_{m+1}(x) = \frac{1}{m+1} [(2m+1)xL_m(x) - mL_{m-1}(x)]. \quad (\text{C.4})$$

Die konkrete Lösung soll – obwohl mit Gleichung (2.85) aus Abschnitt 2.3.4 bereits gegeben – hier nochmal wiederholt werden

$$p\left(\bar{r} := \frac{r}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{r}^2}} \sum_{n=0}^N k_{2n} L_{2n}\left(\sqrt{1-\bar{r}^2}\right)$$

$$\implies u_z(\bar{r}, z=0) = \frac{\pi a(1-\nu)}{2G} \sum_{n=0}^N k_{2n} [L_{2n}(0)]^2 L_{2n}\left(\sqrt{1-\bar{r}^2}\right).$$

Die Anwendung dieser Beziehungen auf den HERTZschen Kontakt inklusive einer eleganten Berechnung von $P(\delta)$ und $\delta(a)$ hat GLADWELL [39] aufgeführt. Dass die Methode durchaus noch aktuell ist, zeigt der Artikel von JAFFAR [52], in welchem sowohl die Normal- als auch Tangentialspannungen bei axialsymmetrischer reibungsbehafteter Indentierung über LEGENDRE Polynome ausgedrückt wurden. Für den durch das AMONTON Gesetz vollständig gekoppelten Kontakt werden Lösungen für die Kugel und den flachen zylindrischen Stempel analysiert. Abschließend möchte ich mit dem vorgestellten Konzept einen reibungsfreien konformen Kontakt behandeln.

Beispielhafte Anwendung auf einen Konformen Kontakt

Gegebene Formfunktion: $u_z(r) = \delta - cr^4$

Verschiebungsansatz: $u_z(\bar{r}) = \frac{\pi a}{\tilde{E}} \sum_{n=0}^2 k_{2n} [L_{2n}(0)]^2 L_{2n}\left(\sqrt{1-\bar{r}^2}\right)$

LEGENDRE Polynome: $L_0(x) = 1 \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(-1 + 3x^2) \quad L_4 = \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$

Einsetzen und Sortieren: $u_z(\bar{r}) = \frac{\pi a}{\tilde{E}} \left[k_0 + \frac{1}{4}k_2 + \frac{9}{64}k_4 + \left(-\frac{3}{8}k_2 - \frac{45}{64}k_4\right)\bar{r}^2 + \frac{315}{512}k_4\bar{r}^4 \right]$

Koeffizientenvergleich: $k_0 = \frac{\tilde{E}}{\pi a} \left(\delta - \frac{8}{15}a^4c \right) \quad k_2 = \frac{64}{21} \frac{\tilde{E}}{\pi} a^3c \quad k_4 = -\frac{512}{315} \frac{\tilde{E}}{\pi} a^3c$

Die Beziehung zwischen der Eindrücktiefe δ und dem Kontaktradius a erhalten wir aus der stetigen Differenzierbarkeit eines kontinuierlichen Kontaktes am Indentierungsrand

$$\lim_{r \rightarrow a} p(r) = 0 \implies \sum_{n=0}^N k_{2n} L_{2n}(0) = 0,$$

die Normalkraft P hingegen mittels Integration der Spannungen $p(r)$ über das Kontaktgebiet¹.

¹Anstelle der Standardintegration ist auch eine Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften der LEGENDRE Polynome möglich.

$$\text{Differenzierbarkeit bei } r = a: \quad \sum_{n=0}^2 k_{2n} L_{2n}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_0 - \frac{1}{2}k_2 + \frac{3}{8}k_4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\delta = \frac{8}{3}a^4c}}$$

$$\text{Einsetzen der Konst. in } p(r): \quad \underline{\underline{p(\bar{r}) = \frac{32}{9} \frac{\tilde{E}ca^3}{\pi} \sqrt{1 - \bar{r}^2} (1 + 2\bar{r}^2)}}$$

$$\text{Integration von } p(r): \quad P := \int_A p(r) dA = \underline{\underline{\frac{64}{15} \tilde{E}ca^5}}$$

Man verifiziere die Ergebnisse mittels der im Rahmen des Ersatzmodells abgeleiteten Gleichungen (2.42), (2.43) und (2.56).

C.2 Darstellung der Geometrie des Ersatzmodells über Wurzelglieder

Im Sinne einer Ankopplung an das reduzierte System zur vereinfachten Berechnung der Kontaktspannungen wird anstelle der realen die Oberflächennormalverschiebung im Ersatzsystem in eine Reihe der Glieder $s^m := (1 - \tilde{x}^2)^{m/2}$ entwickelt. Zunächst sei angenommen, dass dieser Schritt vollzogen ist, Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen daher die 1D-Geometrie in der Form

$$\boxed{\tilde{u}_z(r, 0) = \tilde{g}(s) = \sum_{k=1}^K \tilde{g}_k(s) = \sum_{k=1}^K e_k s^k} \quad (\text{C.5})$$

bildet. Einsetzen von (C.5) in (2.81) gefolgt von einer Substitution auf die Integrationsvariable s und der Berücksichtigung des Hilfsintegrals (A.17) führt auf die reale Kontaktspannungsverteilung

$$p(s) = \sum_{k=1}^K p_k(s) = \frac{1}{s} \frac{\tilde{E}}{\pi a} \sum_{k=1}^K \varkappa_k e_k s^k. \quad (\text{C.6})$$

Ein Vergleich von (C.5) mit (C.6) bestätigt die Vermutung, die Spannungsverteilung mittels einfacher Division der Verschiebungen durch $s := \sqrt{1 - \tilde{x}^2}$ gewinnen zu können; leider müssen dabei aber die einzelnen Glieder gewichtet werden, wobei der schon bekannte Transformationsfaktor \varkappa_k aus Abschnitt 2.2.1 auf Seite 16 zwischen solchen vermittelt:

$$\boxed{p(s) = \frac{\tilde{E}}{\pi a} \frac{1}{s} \sum_{k=1}^K \varkappa_k \tilde{g}_k(s) = \frac{\tilde{E}}{\pi a} \frac{1}{s} \sum_{k=1}^K \varkappa_k e_k s^k.} \quad (\text{C.7})$$

Das Ergebnis (C.7) zusammen mit dem Ansatz für die Verschiebungen im diskreten Federmodell (C.5) stehen in ihrer Einfachheit dem oben erwähnten Lösungsweg über LEGENDRE Polynome nichts nach! Schuldig bleibe ich noch die Relation zwischen den Formkoeffizienten \tilde{c}_k und e_k beim Übergang

$$\tilde{u}_z(x) = \delta - \tilde{f}(x) \quad \longmapsto \quad \tilde{u}_z(x) = \tilde{g}(s), \quad (\text{C.8})$$

wobei ich mich der Einfachheit halber auf gerade Potenzen beschränken möchte². Mit dieser Annahme unter Beachtung der Bestimmungsgleichung für die Eindringtiefe (2.49) erfolgt zunächst die Abbildung vom Original- zum Ersatzsystem

$$u_z(r) = \delta - \sum_{n=1}^N c_{2n} a^{2n} \tilde{r}^{2n} \quad \longmapsto \quad \tilde{u}_z(x) = \sum_{n=1}^N \tilde{c}_{2n} a^{2n} (1 - \tilde{x}^{2n}) \quad (\text{C.9})$$

und im Anschluß die Entwicklung letzteres über die genannten Wurzeln, indem $\tilde{x} = \sqrt{1 - s^2}$ gesetzt wird

$$\tilde{g}(s) = \sum_{n=1}^N \tilde{c}_{2n} a^{2n} [1 - (1 - s^2)^n] = \sum_{n=1}^N \tilde{c}_{2n} a^{2n} \left[1 - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i s^{2i} \right]. \quad (\text{C.10})$$

Diese mit Hilfe von binomischen Formeln zustandegekommene Doppelsumme kann elementar vereinfacht werden, wodurch letzten Endes nur noch

$$\tilde{g}(s) = \sum_{n=1}^N \sum_{r=n}^N \tilde{c}_{2r} a^{2r} \binom{r}{n} (-1)^{n+1} s^{2n} \quad (\text{C.11})$$

verbleibt und ein Koeffizientenvergleich die neuen Formfaktoren e_{2k} definiert

$$e_{2k} := \sum_{k=n}^N \tilde{c}_{2k} a^{2k} \binom{k}{n} (-1)^{n+1}. \quad (\text{C.12})$$

Analog dem vorausgegangenem Abschnitt, möchte ich auch dieses Kapitel mit einem Beispiel abschließen, welches angefangen von einer gegebenen axialsymmetrischen Indenterform den Ablaufprozeß bishin zur Bestimmung der Normaldruckverteilung darlegt.

²Auch G.Ia. POPOV hatte in [89] diese Einschränkung gemacht!

Zweigliedrige Verschiebungsvorgabe mit geraden Exponenten

Gegebene Formfunktion: $u_z(r) = \delta - c_2 r^2 - c_4 r^4$

Formfaktoren - Ersatzgeometrie: $\tilde{c}_2 := \varkappa_2 c_2 = 2c_2 \quad \tilde{c}_4 := \varkappa_4 c_4 = \frac{8}{3}c_4$

Ersatzgeometrie: $\tilde{u}_z(x) := \delta - \tilde{c}_2 x^2 - \tilde{c}_4 x^4 = \delta - 2c_2 x^2 - \frac{8}{3}c_4 x^4$

Eindrücktiefe aus $\tilde{u}_z(a) = 0$: $\underline{\underline{\delta = 2c_2 a^2 + \frac{8}{3}c_4 a^4}} \implies \tilde{u}_z(x) = 2c_2 a^2 (1 - \tilde{x}^2) + \frac{8}{3}c_4 a^4 (1 - \tilde{x}^4)$

Formfaktoren e_{2k} aus (C.12): $e_2 = \tilde{c}_2 a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{c}_4 a^4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{c}_2 a^2 + 2\tilde{c}_4 a^4$
 $e_4 = -\tilde{c}_4 a^4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\tilde{c}_4 a^4$

Druckverteilung nach (C.7): $p(s) = \frac{\tilde{E}}{\pi a s} (\varkappa_2 e_2 s^2 + \varkappa_4 e_4 s^4)$
 $p(s) = \frac{\tilde{E}}{\pi a} [\varkappa_2 (\tilde{c}_2 a^2 + 2\tilde{c}_4 a^4) s - \varkappa_4 \tilde{c}_4 a^4 s^3]$
 $\underline{\underline{p(x=r) = \frac{\tilde{E}}{\pi} \left[4c_2 a + \frac{32}{3}c_4 a^3 - \frac{64}{9}c_4 a^3 (1 - \tilde{r}^2) \right] \sqrt{1 - \tilde{r}^2}}}$

Die Richtigkeit der aus dem zweigliedrigen Verschiebungsansatz berechneten Druckverteilung kann man leicht prüfen, indem je ein Koeffizient c_{2k} zu Null gesetzt wird. Die resultierenden Lösungen ergeben dann den Spannungsverlauf nach HERTZ bzw. den für das behandelte Beispiel eines konformen Kontaktes. Es bleibt noch zu sagen, dass das Vorhandensein auch ungerader Potenzen in r erheblichen Mehraufwand bedeutet, da u.a. Entwicklungen in eine unendliche TAYLOR-Reihe notwendig sind.

Anhang D

Bruchmechanische Grundlagen

D.1 Energiefreisetzungsrate und Bruchkriterium nach GRIFFITH

Betrachten wir den durch eine konstante Last P beanspruchten axialsymmetrischen elastischen Körper in Abbildung D.1, welcher an einer starren horizontalen Ebene adhiert. Das kreisförmige Kontaktgebiet soll in dem gezeigten Gleichgewichtszustand die Fläche A besitzen.

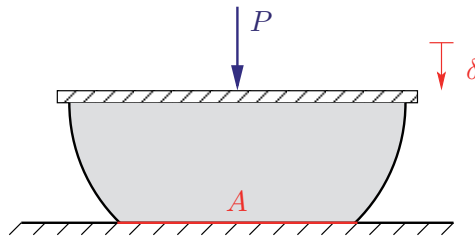


Abbildung D.1: Durch eine konstante Kraft P beanspruchter elastischer Körper, welcher über die Fläche A an einer Ebene adhiert.

Der Zustand des adiabatisch abgeschlossenen Systems hängt nur von der Kontaktfläche A und der Eindringtiefe δ ab. Die innere Energie U ist rein elastischer Natur ($U \equiv U_{el}$). Nach dem *ersten Hauptsatz der Thermodynamik* wird ein Beitrag der Arbeit der äußeren Lasten W^a eine Änderung der Summe aus elastischer Energie U_{el} und Oberflächenenergie U_S hervorrufen

$$\begin{aligned} dU(A, \delta) + dU_S(A) &= dW^a \\ dU_{el}(A, \delta) - \bar{\gamma} dA &= P(A, \delta) d\delta. \end{aligned} \quad (D.1)$$

$\bar{\gamma}$ bezeichnet darin die DUPRÉsche Adhäsionsenergie. Mittels LEGÈNDRE-Transformation können wir das Paar unabhängiger extensiver Parameter tauschen

$$-\underbrace{d[P\delta - U_{el}]}_{U_{el}^k(A, P)} - \bar{\gamma} dA = -\delta(A, P) dP, \quad (D.2)$$

sodass die Ausführung der vollständigen Differenziale für die elastische und komplementäre elastische Energie U_{el}^k nach einem Koeffizientenvergleich einerseits die Sätze von CASTIGLIANO

$$\left(\frac{\partial U_{el}}{\partial \delta} \right)_A = P \quad \left(\frac{\partial U_{el}^k}{\partial P} \right)_A = \delta, \quad (D.3)$$

andererseits die unterschiedlichen Berechnungsmöglichkeiten für die *elastische Energiefreisetzungsrate* \tilde{G}

$$\tilde{G} := \left(\frac{\partial U_{el}}{\partial A} \right)_{\delta} = - \left(\frac{\partial U_{el}^k}{\partial A} \right)_P \quad (\text{D.4})$$

liefert. Wie eingangs erwähnt, nehmen wir nun eine Variation der Kontaktfläche bei konstanter Kraft P vor ($\Rightarrow dP = 0$), so dass aus (D.2) die Gleichgewichtsbedingung

$$\tilde{G} = - \left(\frac{\partial U_{el}^k}{\partial A} \right)_P = \bar{\gamma} \quad (\text{D.5})$$

abfällt. Eine gedachte Änderung der Kontaktfläche bei konstanter Verschiebung δ ($\Rightarrow d\delta = 0$) führt auf die gleiche Bedingung, nur die Berechnung von \tilde{G} geschieht auf unterschiedliche Weise

$$\tilde{G} = \left(\frac{\partial U_{el}}{\partial A} \right)_{\delta} = \bar{\gamma}. \quad (\text{D.6})$$

Obige Gleichgewichtsrelationen bilden das *Energetische Bruchkriterium nach GRIFFITH* [41]. Völlig analog kann man nun die Stabilität des Gleichgewichtes entweder bei konstanter Kraft oder konstanter Verschiebung untersuchen; es werden Diskrepanzen in den Stabilitätsgrenzen auftreten. Die Stabilität bezieht sich dabei auf den Rand des Kontaktes zwischen dem elastischen Körper und der Ebene, welcher als Riß gedeutet wird, der sich nach innen bzw. außen ausbreiten kann. Für ein stabiles Gleichgewicht

$$\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial A} \right)_{P \text{ bzw. } \delta} > 0 \quad (\text{D.7})$$

würde eine Störung/Variation der Kontaktfläche den Riß stets wieder schließen. Nur die Änderung von P bzw. δ kann das Kontaktgebiet beeinflussen, wobei sich wiederum $\tilde{G} = \bar{\gamma}$ einstellt.¹ Die kritische Kraft P_c – die Adhäsionskraft² – sowie die kritische Eindringtiefe δ_c gehören zum grenzstabilen Zustand. Sie ergeben sich damit aus den Beziehungen

$$\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial A} \right)_{P \text{ bzw. } \delta} = 0. \quad (\text{D.8})$$

Im quasistatischen Gleichgewicht muß das totale Differenzial von \tilde{G} gleich Null sein

$$d\tilde{G}(A, \delta) = \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial A} \right)_{\delta} dA + \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \delta} \right)_A d\delta = 0 \quad (\text{D.9})$$

$$d\tilde{G}(A, P) = \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial A} \right)_P dA + \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial P} \right)_A dP = 0, \quad (\text{D.10})$$

nutzt man zusätzlich die Indifferenzforderungen (D.8), so verschwinden hierin die partiellen Ableitungen nach A und unter den Voraussetzungen $\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \delta} \right)_A \neq 0$ bzw. $\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial P} \right)_A \neq 0$ erhalten wir zwei leicht nachvollziehbare alternative Stabilitätsgleichungen

$$\frac{d\delta}{dA} = 0 \quad \frac{dP}{dA} = 0. \quad (\text{D.11})$$

Ihre Auswertung führt auf unterschiedliche kritische Kontaktradien, je nachdem, ob der Versuch einer Weg- oder Kraftsteuerung folgt. Die kritische/minimale Eindringtiefe, bei welcher sich der Riss spontan ausbreitet, kann daher ebenfalls auf zweierlei Art definiert werden.

¹Gemeint sind quasistatische Änderungen der Normalkraft oder Verschiebung!

²Häufig wird nur der Betrag von P_c als Adhäsionskraft bezeichnet. Da aber die Geometrie entscheidenden Einfluß auf das Vorzeichen von P_c nimmt, möchte ich davon absehen!

D.2 Äquivalenz zum Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren

Ebene Probleme in der linear elastischen Bruchmechanik löst man bevorzugt mit Hilfe der *Methode der komplexen Spannungsfunktionen*. In dieser Arbeit werden nur die Ergebnisse in der unmittelbaren Umgebung einer Rissfront zugehörig zu einem Riss im Modus I wiedergegeben. Darunter versteht man einen Riss, der sich senkrecht zur Rissfront aufgrund einer Zugbelastung öffnet. Für eine genaue Rechnung sei auf [3] verwiesen.

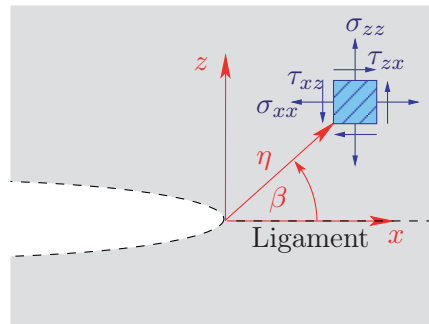


Abbildung D.2: Zur Kinematik und Dynamik eines ebenen Risses im Öffnungsmodus I

Im Nahfeld des Risses (siehe Abbildung D.2) sind die Spannungen und Verschiebungen durch

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}(\eta, \beta) \\ \sigma_{zz}(\eta, \beta) \\ \tau_{xz}(\eta, \beta) \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\eta}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\beta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{bmatrix} u_x(\eta, \beta) \\ u_z(\eta, \beta) \end{bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{\eta}{2\pi}} (3 - 4\nu - \cos\beta) \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

gegeben. Unser Interesse galt nun gerade den Ligamentspannungen $\sigma_{zz}(\eta, \beta = 0)$ sowie den Normalverschiebungen $u_z(\eta, \beta = \pm\pi)$ – der Öffnungsform des Risses; diese lauten³

$$\sigma_{zz}(\eta, \beta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\eta}} \quad (\text{D.14})$$

$$u_z(\eta, \beta = \pm\pi) = \pm \frac{2}{E} K_I \sqrt{\frac{\eta}{2\pi}}. \quad (\text{D.15})$$

Die Stärke des Rissspitzenfeldes charakterisiert allein der K -Faktor, welcher i. a. vom Material sowie von der Geometrie, Länge und Belastung des Risses abhängt, was IRWIN [51] dazu bewegte, ein Bruchkriterium zu definieren. Nach diesem wird eine Rissausbreitung erst dann einsetzen, wenn der Spannungsintensitätsfaktor K die sogenannte *Bruchzähigkeit* K_c des Werkstoffs erreicht, die wiederum experimentell aus genormten Bruchversuchen ermittelbar ist. Bei Kenntnis der Ligamentspannungen geht K_I aus der Umkehrung

$$K_I := \lim_{\eta \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\eta} \sigma_{zz}(\eta, 0) \quad (\text{D.16})$$

³Achtung: Hierin gilt $\tilde{E} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$!

hervor.

Beschäftigen wir uns nun mit der Fragestellung, wieviel Arbeit für eine Erweiterung des Risses um $\Delta\ell$ erforderlich ist. Dazu führen wir gedanklich einen entsprechenden Schnitt im Ligament um die Risspitze aus, wodurch die inneren Spannungen nach (D.14) zu äußeren Lasten werden (nach dem *Wechselwirkungsprinzip* sind diese an den Schnittufern gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet.). Anschließend werden jene quasistatisch auf Null abgesenkt, so dass sich der Riss entsprechend (D.15) öffnet; die Spannungen verrichten dabei die Arbeit ΔW_c an den Normalverschiebungen der Schnittufer⁴

$$\begin{aligned}
 \Delta W_c &= -2b \int_0^{\Delta\ell} \frac{1}{2} \sigma_{zz}(\eta = s, \beta = 0; \ell) u_z(\eta = \Delta\ell - s, \beta = \pi; \ell + \Delta\ell) ds \\
 &= -\frac{2b}{\tilde{E}} \int_0^{\Delta\ell} \frac{K_I(\ell) K_I(\ell + \Delta\ell)}{\sqrt{2\pi s}} \sqrt{\frac{\Delta\ell - s}{2\pi}} ds \\
 &= -\frac{b K_I(\ell) K_I(\ell + \Delta\ell)}{2\tilde{E}} \Delta\ell.
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

b gibt die Tiefe/Breite des ebenen Zustandes an, die Vergrößerung der Rissfläche ist demnach $\Delta A = b \Delta\ell$.

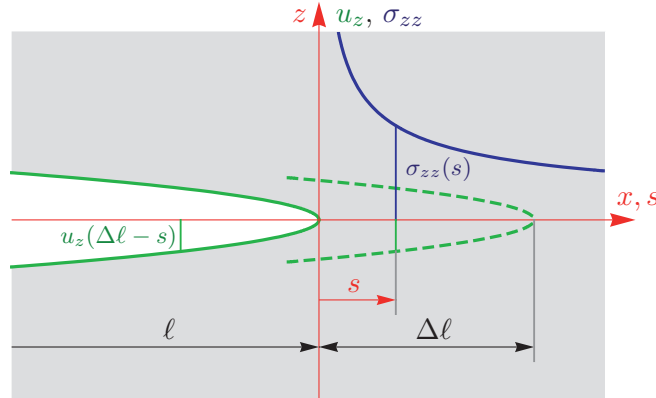


Abbildung D.3: Qualitative Darstellung der Ligamentspannungen sowie der realen und gedachten Normalverschiebungen – Zum Arbeitsintegral bei Risserweiterung

Abbildung D.3 trägt zum besseren Verständnis oben geäußerter Vorgehensweise bei. Das Verhältnis $\Delta W_c/\Delta A$ ist ein Maß für die bei einem Rissfortschritt freigesetzte Energie pro Fläche. Durch Übergang zum Differenzialquotienten erhalten wir einen Ausdruck für die im vorigen Abschnitt eingeführte *elastische Energiefreisetzungsrate*

$$\tilde{G} = -\frac{dW_c}{dA} = \frac{K_I^2(\ell)}{2\tilde{E}}. \tag{D.18}$$

Diese Formel unterstreicht die Äquivalenz der Bruchkriterien nach GRIFFITH (energetisches Kriterium) und IRWIN (Spannungsintensitätskonzept); von ihr wird in Kapitel 3.1.3 Gebrauch gemacht.

⁴Dabei ist darauf zu achten, dass die Spannungen bei einer Risslänge ℓ und die Verschiebungen bei $\ell + \Delta\ell$ anzusetzen sind (Die K -Faktoren waren ja u. a. von der Risslänge ℓ abhängig!).

Anhang E

Linienkontakt des inhomogenen elastischen Kontinuums

In diesem Abschnitt sollen kurz die wesentlichen Zusammenhänge und Ergebnisse für den in Abbildung 4.1 skizzierten jedoch inhomogenen Keil aufgeführt werden, welcher an seiner Spitze durch die Linienlasten P und Q beansprucht wird. Dabei orientiere ich mich an den Ausführungen von BOOKER [9], auch wenn vergleichbare Ergebnisse schon weitaus früher bekannt wurden. Die Inhomogenität soll folgender Art sein:

$$E(z) = m_E z^\alpha \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (\text{E.1})$$

Die in Kapitel 4.1 erläuterte *Selbstähnlichkeit* sowie das *globale Gleichgewicht* über verschiedene selbstähnliche Oberflächen sagen die Darstellung der Feldgrößen in der Form

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(R, \theta) &= \frac{1}{R} S_{ij}(\theta) \\ u_i(R, \theta) &= \frac{1}{R^\alpha} U_i(\theta) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

voraus, wobei für die Verschiebungen die Beziehung (E.1) berücksichtigt wurde. In den zugrundegelegten Polarkoordinaten R, θ lauten die das Elastizitätsproblem beschreibenden Grundgleichungen

- Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta}}{R} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{R\theta}}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

- Materialgesetz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RR} &= \frac{1 + \nu}{E(z)} [(1 - \nu) \sigma_{RR} - \nu \sigma_{\theta\theta}] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1 + \nu}{E(z)} [(1 - \nu) \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{RR}] \\ \varepsilon_{R\theta} &= \frac{1 + \nu}{E(z)} \sigma_{R\theta} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

- Verschiebungs-Verzerrungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial R} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R} \\
\varepsilon_{R\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} \right)
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (E.3) vereinfachen sich erheblich, wenn man den Ansatz (E.2) verwendet. Für die nur noch vom Winkel θ abhängigen Größen $S_{R\theta}$ und $S_{\theta\theta}$ ergeben sich die beiden gekoppelten partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{R\theta}}{\partial \theta} - S_{\theta\theta} &= 0 \\
\frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + S_{R\theta} &= 0.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Da beide Seiten des Keils spannungsfrei sind, wird sich nach Anpassung der allgemeinen Lösung an die zugehörigen Spannungsrandbedingungen auch *im Inneren* $S_{R\theta} = S_{\theta\theta} = 0$ einstellen – einzig von Null verschiedene Spannung ist σ_{RR} . Mit diesen Informationen gewinnen wir aus den Verschiebungs-Verzerrungsgleichungen (E.5) und dem Materialgesetz (E.4) die Bestimmungsdifferenzialgleichungen für die noch drei verbleibenden Unbekannten $S_{RR}(\theta)$, $U_R(\theta)$ und $U_\theta(\theta)$

$$\begin{aligned}
-\alpha U_R(\theta) &= \frac{1 - \nu^2}{m_E \cos^\alpha \theta} S_{RR}(\theta) \\
\frac{\partial U_\theta(\theta)}{\partial \theta} + U_R(\theta) &= -\frac{1 + \nu}{m_E \cos^\alpha \theta} \nu S_{RR}(\theta) \\
\frac{\partial U_R(\theta)}{\partial \theta} - (1 + \alpha) U_\theta(\theta) &= 0,
\end{aligned} \tag{E.7}$$

deren allgemeine Lösungen sich mit der Abkürzung $\beta := \sqrt{(1 + \alpha) \left(1 - \alpha \frac{\nu}{1 - \nu}\right)}$ zu

$$\begin{aligned}
U_R(\theta) &= C \cos(\beta\theta) + D \sin(\beta\theta) \\
U_\theta(\theta) &= \frac{\beta}{1 + \alpha} [-C \sin(\beta\theta) + D \cos(\beta\theta)] \\
S_{RR}(\theta) &= -\frac{\alpha m_E \cos^\alpha \theta}{1 - \nu^2} [C \cos(\beta\theta) + D \sin(\beta\theta)]
\end{aligned} \tag{E.8}$$

ergeben. Darin sind die Konstanten C und D aus dem globalen Gleichgewicht zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
P &= -\int_{\theta_1}^{\theta_2} S_{RR}(\theta) \cos \theta \, d\theta \\
Q &= -\int_{\theta_1}^{\theta_2} S_{RR}(\theta) \sin \theta \, d\theta.
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Im Spezialfall eines elastischen Halbraums (im EVZ) sind $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, so dass unter Verwendung der Hilfsintegrale (A.20) und (A.21) die Integrationskonstanten

$$C(\alpha, \beta) = \frac{1 - \nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} P \quad (\text{E.10})$$

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + 1}{\beta} \cdot \frac{1 - \nu^2}{\alpha m_E} F_{\alpha\beta} Q \quad \text{mit} \quad F_{\alpha\beta} := \frac{\Gamma\left(\frac{3+\alpha-\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3+\alpha+\beta}{2}\right)}{2^{-1-\alpha} \pi \Gamma(2+\alpha)} \quad (\text{E.11})$$

resultieren; darin gilt entsprechend obiger Einführung $\beta = \beta(\alpha, \nu)$.

Anhang F

Kinematik und Dynamik hierarchischer Systeme

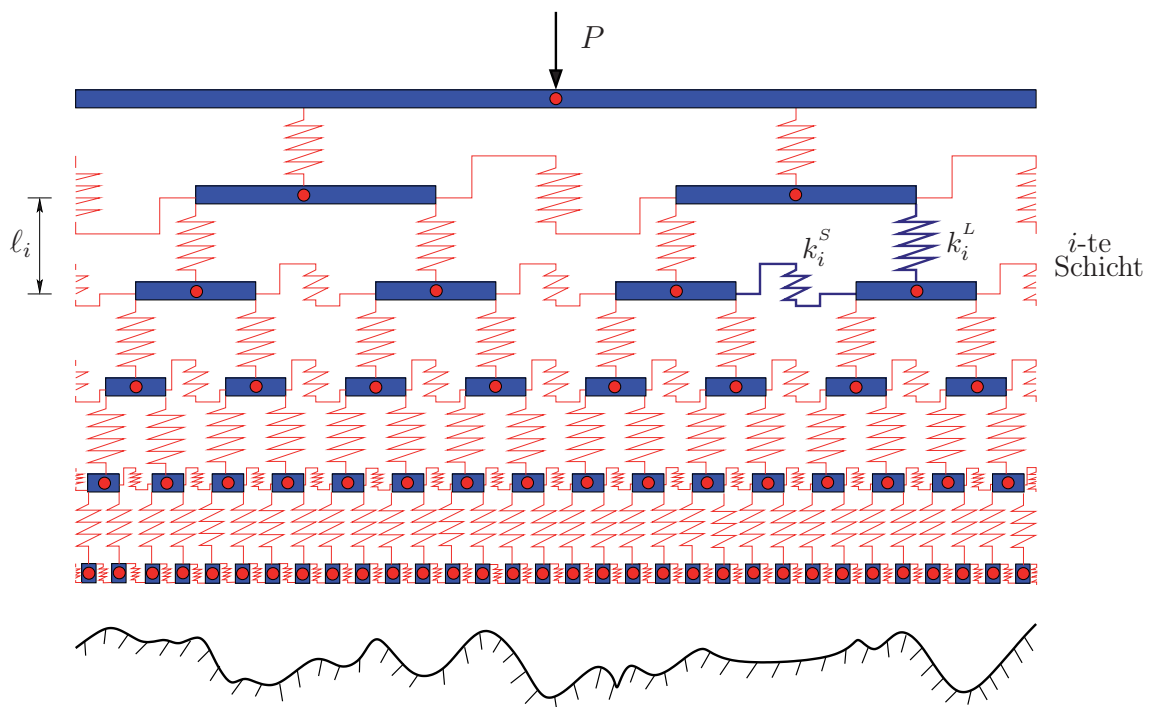


Abbildung F.1: Struktur eines hierarchischen Systems mit äquidistanter Schichtung in z -Richtung; Schub- und Längsfedern der i -ten Schicht sind hervorgehoben. Das Modell ist auf vertikale Freiheitsgrade beschränkt und beinhaltet periodische Randbedingungen.

Ein hierarchisches Modell nutzt die Tatsache aus, dass die Reichweite von Inhomogenitäten im Verschiebungsfeld, welche eine charakteristische Wellenlänge der Rauigkeit hervorruft, in etwa von der gleichen Größenordnung ist, wie die Wellenlänge selbst (siehe Kap. 6.1.1). Bei der Abbildung des elastischen Halbraums durch ein diskretes Teilchenmodell müssen wir daher nur im oberflächennahen Bereich eine sehr feine Diskretisierung verwenden und können mit zunehmender Tiefe eine Vergröberung vornehmen. Abbildung F.1 zeigt eine zweidimensionale Beispielanordnung der in dieser Arbeit verwendeten Modelle, bei welcher die Anzahl der Teilchen von Schicht zu Schicht halbiert wird. Alle Teilchen sollen nur *vertikale Freiheitsgrade* besitzen, d.h. die angedeuteten Balkenelemente verfügen

über keinerlei Rotationsbewegungen. In Tiefenrichtung sind die Teilchen durch Längsfedern der Steifigkeit k_i^L miteinander verbunden, horizontal durch „Schubfedern“ (Federkonstante k_i^S) gekoppelt; der Index i kennzeichnet die betrachtete Schicht.

Ferner sind periodische Randbedingungen implementiert, d.h. die Randpunkte innerhalb einer Schicht interagieren miteinander.¹ Auch wenn die Skizze eine äquidistante Schichtung andeutet, so soll in allen Modellen der Schichtabstand mit dem Faktor *zwei* zunehmen. Trotz der erheblichen Vereinfachungen des Modells werden die Steifigkeitsparameter durch einen Vergleich mit jenen des elastischen Kontinuums gewonnen.

F.1 Wechselwirkungen zwischen den Teilchen

Die Anpassung der Längs- und Schubsteifigkeiten erfolgt mittels Bezug auf einen einachsigen Zug- und einen Scherversuch. Aus der Konstanz des Elastizitäts- und Gleitmoduls erhalten wir die nötigen Informationen darüber, wie die Steifigkeitsparameter von Schicht zu Schicht zu wählen sind, um lokal dieselben Materialeigenschaften zu erzeugen (Abbildung F.2).

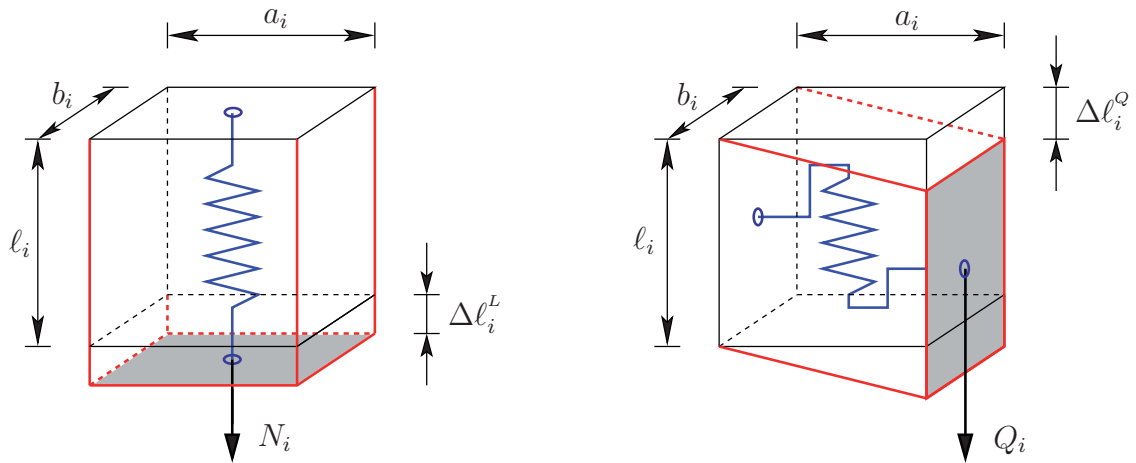


Abbildung F.2: Zur Anpassung von Längs- und Schubsteifigkeiten im hierarchischen Gittermodell; Vergleich mit lokalem Zug- und Scherversuch.

$$k_i^L = k_{i-1}^L \cdot \frac{a_i}{a_{i-1}} \cdot \frac{b_i}{b_{i-1}} \cdot \frac{l_{i-1}}{l_i} \quad (\text{F.1})$$

$$k_i^S = k_{i-1}^S \cdot \frac{a_{i-1}}{a_i} \cdot \frac{b_i}{b_{i-1}} \cdot \frac{l_i}{l_{i-1}} \quad (\text{F.2})$$

a_i , b_i und l_i sind die anteiligen linearen Abmessungen, die jedem Federelement zustehen. Obwohl die Schubfeder stets am Rande zweier Schichten liegt, soll die Zuordnung zu den Längen in der darüberliegenden Schicht erfolgen. Selbstverständlich nehmen wir dabei einen weiteren Fehler billigend in Kauf, der allerdings aufgrund der vorausgegangenen Vereinfachungen vertretbar sein dürfte. Ein diesbezüglich genaueres (aber komplizierteres) Multiskalenmodell, welches sogar (aus einer Reihenschaltung von Schichtsteifigkeiten hervorgehende) Zwischenfedern berücksichtigt, wird in [124] vorgestellt. Ob dieses ebenfalls nicht isotrope Modell genauere Ergebnisse liefert, sei dahingestellt.

¹Das oberste Teilchen würde mit sich selbst wechselwirken, was keinen Sinn macht, weshalb hier ein Balkenelement über die ganze Breite gezogen wurde.

Ein nach Vorgaben dieses Kapitels aufgebautes, *ebenes* hierarchisches Modell zeigt die Besonderheit, dass die *Steifigkeiten aller Schichten gleich* zu wählen sind! Im räumlichen Fall hingegen müssen die Steifigkeiten von Schicht zu Schicht verdoppelt werden. Die Beziehung zwischen den Längs- und Schubfedern einer Schicht ist durch die Abhängigkeit von Elastizitäts- und Gleitmodul festgelegt. Für eine Querdehnzahl von $\nu = 0$ ergibt sich der Zusammenhang $G = \frac{1}{2}E$ und damit

$$k_i^S = \frac{1}{2}k_i^L. \quad (\text{F.3})$$

Eine zur Abbildung von kinetischen Vorgängen korrekte Massen Anpassung ist nach Kenntnis der linearen Abmessungen a_i , b_i und ℓ_i banal.

F.2 Wechselwirkungen mit der Oberfläche, Kontaktdefinition

Die Beschränkung auf vertikale Freiheitsgrade wurde bereits angesprochen. Die starre Oberfläche, mit welcher der elastische Block (das hierarchische System) in Kontakt kommt, wird in gleicher Weise diskretisiert wie die unterste Schicht des Modells. *Jedes Teilchen der Grundsicht soll nur mit dem Teilchen der starren Oberfläche wechselwirken, das die gleiche x - und y -Koordinate aufweist.* Diese lokale Kraft, welche nur von Δz abhängt, soll derart bemessen sein, dass sie der Wechselwirkung mit allen anderen Teilchen des Gegenkörpers entspricht. Wären unsere Teilchen neutrale Atome, so kann die Kraft mit Hilfe des LENNARD-JONES-Potenzials ermittelt werden. Dabei ist zunächst das Potenzial zwischen einem Teilchen und dem Grundkörper zu berechnen und anschließend daraus die konservative Kraft mittels Differenziation nach der Höhendifferenz. Es ergibt sich [90]

$$F_{\text{ext}}(z) = C_1 \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^{10} - C_2 \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^4. \quad (\text{F.4})$$

Für die hier untersuchten nicht-adhäsiven Kontakte ist $C_2 = 0$ zu setzen. Obwohl aus der Dynamik auf atomarer Skala entsprungen, soll diese Wechselwirkung zum Teil auch als Abstoßungskraft zwischen unseren Teilchen angesetzt werden. Für die Simulation des Kontaktes mit rauen Oberflächen wird eine exponentiell abklingende Funktion vorgezogen, um numerische Probleme nahe der Polstelle zu umgehen.

„*Kontakt*“ definieren wir, sofern ein kritischer Abstand Δz_{kr} zwischen Teilchen und Grundkörper unterschritten wurde. Dieser wird aus einer Anpassung an grundlegende zwei- und dreidimensionale Versuche gewonnen.

Literaturverzeichnis

- [1] G.B. Airy. British Association of Advanced Science Report, 1862.
- [2] A. Aleksandrov. Solution of Axisymmetric Problems of the Theory of Elasticity with the Aid of Relations between Axisymmetric and Plane States of Stress. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 25, 1961.
- [3] T.L. Anderson. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC, 2005.
- [4] J.F. Archard. Elastic deformation and the laws of friction. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243(1233):190–205, 1957.
- [5] A.O. Awojobi and R.E. Gibson. Plane strain and axially symmetric problems of a linearly nonhomogeneous elastic half-space. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 26(3):285, 1973.
- [6] J.R. Barber. *Elasticity*. Kluwer Academic Pub, 2002.
- [7] M. Barquins and D. Maugis. Adhesive Contact of Axisymmetric Punches on an Elastic Half-Space: The Modified Hertz–Huber’s Stress Tensor for Contacting Spheres. *J. Mec. Theor. Appl.(J. Theor. Appl. Mech.)*, 1(2):331–57, 1982.
- [8] M. Benz, K.J. Rosenberg, E.J. Kramer, and J.N. Israelachvili. The deformation and adhesion of randomly rough and patterned surfaces. *J. Phys. Chem. B*, 110(24):11884–11893, 2006.
- [9] J.R. Booker, N.P. Balaam, and E.H. Davis. The behaviour of an elastic non-homogeneous half-space. Part I-line and point loads. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9:353–367, 1985.
- [10] M. Born and K. Huang. *Dynamical theory of crystal lattices*. Oxford University Press, USA, 1988.
- [11] H. Borowicka. Die Druckausbreitung im Halbraum bei linear zunehmendem Elastizitätsmodul. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 14(2):75–82, 1943.
- [12] M. Borri-Brunetto, B. Chiaia, and M. Ciavarella. Incipient sliding of rough surfaces in contact: a multiscale numerical analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(46-47):6053–6073, 2001.
- [13] J. Boussinesq. 1885, Application des Potentiels a L’etude de L’equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques, Gauthier-Villars, Paris.
- [14] F.P. Bowden and D. Tabor. *The friction and lubrication of solids*. Oxford University Press, USA, 2001.

- [15] R.N. Bracewell. Strip integration in radio astronomy. *Aust. J. Phys*, 9(198):41, 1956.
- [16] E. Broszeit, Th. Preussler, M. Wagner, and Zwirlein O. Stress Hypotheses and material stresses in Hertzian contacts. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 17(7), 1986.
- [17] I.W. Busbridge. Dual integral equations. *Proc. London Math. Soc.*, 44:115, 1938.
- [18] A.W. Bush, R.D. Gibson, and T.R. Thomas. The elastic contact of a rough surface. *Wear*, 35(1):87–111, 1975.
- [19] G.A. Buxton, C.M. Care, and D.J. Cleaver. A lattice spring model of heterogeneous materials with plasticity. *Modelling and simulation in materials science and engineering*, 9:485, 2001.
- [20] G. Caldarelli, C. Castellano, and A. Petri. Criticality in models for fracture in disordered media. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 270(1-2):15–20, 1999.
- [21] C.R. Calladine and J.A. Greenwood. Line and point loads on a non-homogeneous incompressible elastic half-space. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 31(4):507, 1978.
- [22] C. Campañá and M.H. Müser. Practical Green’s function approach to the simulation of elastic semi-infinite solids. *Physical Review B*, 74(7):75420, 2006.
- [23] C. Campañá and M.H. Müser. Contact mechanics of real vs. randomly rough surfaces: A Green’s function molecular dynamics study. *EPL (Europhysics Letters)*, 77:38005, 2007.
- [24] V. Cerruti. Ricerche Intorno all’Equilibrio dei Corpie Elastici Isotropi. *Atti della R. Accademia dei Lincei, Memoriae della Classe de Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 13:81, 1882.
- [25] A. Chandra and G. Fu. Normal indentation of elastic half-space with a rigid frictionless axisymmetric punch. *Journal of applied mechanics*, 69(2):142, 2002.
- [26] A. del Campo and E. Arzt. Design parameters and current fabrication approaches for developing bioinspired dry adhesives. *Macromolecular Bioscience*, 7(2):118–127, 2007.
- [27] M.M. Filonenko-Boroditsch and HU Teetz. *Elastizitätstheorie*. Fachbuchverlag Leipzig, 1967.
- [28] A. Flamant. Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. *CR Acad. Sci. Paris*, 114:1465–1468, 1892.
- [29] O.K. Fröhlich. *Druckverteilung im Baugrunde*. Springer, 1934.
- [30] H. Gao, X. Wang, H. Yao, S. Gorb, and E. Arzt. Mechanics of hierarchical adhesion structures of geckos. *Mechanics of Materials*, 37(2-3):275–285, 2005.
- [31] H. Gao and H. Yao. Shape insensitive optimal adhesion of nanoscale fibrillar structures. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101(21):7851, 2004.
- [32] T. Geike. *Theoretische Grundlagen eines schnellen Berechnungsverfahrens für den Kontakt rauer Oberflächen*. PhD thesis, Universitätsbibliothek, 2007.
- [33] T. Geike and V.L. Popov. Mapping of three-dimensional contact problems into one dimension. *Physical Review E*, 76:036710, 2007.
- [34] A.E. Giannakopoulos and P. Pallot. Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(8):1597–1631, 2000.

- [35] R.E. Gibson. Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space. *Geotechnique*, 17(1):58–67, 1967.
- [36] R.E. Gibson, GL England, and MJL Hussey. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. *Geotechnique*, 17(3):261–273, 1967.
- [37] R.E. Gibson and G.C. Sills. On the loaded elastic half-space with a depth varying Poisson's ratio. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 20(5):691–695, 1969.
- [38] K. Girkmann. *Flächentragwerke*, 6. Auflage, 1963.
- [39] G.M.L. Gladwell. *Contact problems in the classical theory of elasticity*. Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [40] J.A. Greenwood and J.B.P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 300–319, 1966.
- [41] A.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, pages 163–198, 1921.
- [42] H.G. Hahn. *Elastizitätstheorie: Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf ein-dimensionale, Ebene und räumliche Probleme*. Teubner, 1985.
- [43] G.N. Hassold and D.J. Srolovitz. Brittle fracture in materials with random defects. *Physical Review B*, 39(13):9273–9281, 1989.
- [44] U. Herbrich. *Wellenmodale Analyse von Ketten aus diskreten Mehrgrößensystemen: Bewertung von Verfahren der Ermittlung von Eigenschwingungen*. Cuvillier, E, 2009.
- [45] H. Hertz. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92:156–171, 1882.
- [46] G.N. Hounsfield. Computerized transverse axial scanning (tomography): Part 1. Description of system. *British Journal of Radiology*, 46(552):1016, 1973.
- [47] A. Hrennikoff. Solution of problems of elasticity by the framework method. *Journal of Applied Mechanics*, 8(4):169–175, 1941.
- [48] M.T. Huber. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. *Annalen der Physik*, 319(6):153–163, 1904.
- [49] S. Hyun, L. Pei, J.F. Molinari, and M.O. Robbins. Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. *Physical review E*, 70(2):26117, 2004.
- [50] S. Hyun and M.O. Robbins. Elastic contact between rough surfaces: effect of roughness at large and small wavelengths. *Tribology International*, 40(10-12):1413–1422, 2007.
- [51] G.R. Irwin. *Handbuch der Physik. Vol. 79*:551–590, 1958.
- [52] M.J. Jaffar. Axi-symmetric contact of a punch on an elastic half-space in the presence of tangential tractions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46:1233–1244, 2004.
- [53] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [54] K.L. Johnson and J.A. Greenwood. An adhesion map for the contact of elastic spheres. *Journal of colloid and interface science*, 192(2):326–333, 1997.

- [55] K.L. Johnson, K. Kendall, and A.D. Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 324(1558):301–313, 1971.
- [56] M. Kachanov, B. Shafiro, and I. Tsukrov. *Handbook of elasticity solutions*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [57] P.N. Keating. Effect of invariance requirements on the elastic strain energy of crystals with application to the diamond structure. *Physical Review*, 145(2):637–645, 1966.
- [58] P.N. Keating. Relationship between the macroscopic and microscopic theory of crystal elasticity. I. Primitive crystals. *Physical Review*, 152(2):774–779, 1966.
- [59] R.B. King. Elastic analysis of some punch problems for a layered medium. *Int. J. Solids Struct.*, 23(12):1657, 1987.
- [60] J.G. Kirkwood. The skeletal modes of vibration of long chain molecules. *The Journal of Chemical Physics*, 7:506, 1939.
- [61] KH. Kloos and E. Broszeit. Grundsätzliche Betrachtungen zur Oberflächenermüdung. *Mate-rialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 7(3), 1976.
- [62] B. Lawn and R. Wilshaw. Indentation fracture: principles and applications. *Journal of Mate-rials Science*, 10(6):1049–1081, 1975.
- [63] S.G. Lekhnitskii. Radial distribution of stresses in a wedge and in a half-plane with variable modulus of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 26(1):199–206, 1962.
- [64] A.E.H. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 1906.
- [65] A.E.H. Love. Boussinesq’s problem for a rigid cone. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 10:161–175, 1939.
- [66] D. Maugis. *Contact, adhesion, and rupture of elastic solids*. Springer Verlag, 2000.
- [67] D. Maugis and M. Barquins. Fracture mechanics and the adherence of viscoelastic bodies. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 11:1989–2023, 1978.
- [68] D. Maugis and M. Barquins. Adhesive contact of a conical punch on an elastic half-space. *Journal de Physique Lettres*, 42(5):95–97, 1981.
- [69] D. Maugis and M. Barquins. Adhesive contact of sectionally smooth-ended punches on elastic half-spaces: theory and experiment. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 16:1843–1874, 1983.
- [70] D. Maugis, M. Barquins, and R. Courtel. Griffith Cracks and Adhesion of Elastic Solids. *Metaux-Corrosion-Industrie*, (605):1–10, 1976.
- [71] R.D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *J. appl. Mech.*, 16(3):259–268, 1949.
- [72] L. Monette and M.P. Anderson. Elastic and fracture properties of the two-dimensional tri- angular and square lattices. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2:53, 1994.
- [73] W.B. Morton and L.J. Close. Notes on Hertz’s Theory of Contact Problems. *Philos. Mag.*, 43:320, 1922.

-
- [74] M. Müller and G.-P. Ostermeyer. A Cellular Automaton model to describe the three-dimensional friction and wear mechanism of brake systems. *Wear*, 263(7-12):1175–1188, 2007.
- [75] B. Noble and D.A. Spence. Formulation of Two-Dimensional and Axisymmetric Problems for an Elastic Half-Space., 1971.
- [76] W.C. Oliver, G.M. Pharr, et al. Improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, 7(6):1564–1583, 1992.
- [77] G.-P. Ostermeyer et al. Dynamic interaction of friction and surface topography in brake systems. *Tribology International*, 39(5):370–380, 2006.
- [78] G.-P. Ostermeyer and M. Müller. New insights into the tribology of brake systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 222(7):1167–1200, 2008.
- [79] M. Ostoja-Starzewski. Lattice models in micromechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 55:35, 2002.
- [80] A. Parisi and G. Caldarelli. Self-affine properties of fractures in brittle materials. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 280(1-2):161–165, 2000.
- [81] B.N.J. Persson. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*, 87(11):116101, 2001.
- [82] B.N.J. Persson. Theory of rubber friction and contact mechanics. *The Journal of Chemical Physics*, 115:3840, 2001.
- [83] B.N.J. Persson. Relation between interfacial separation and load: A general theory of contact mechanics. *Physical review letters*, 99(12):125502, 2007.
- [84] B.N.J. Persson. Fluid dynamics at the interface between contacting elastic solids with randomly rough surfaces. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 22:265004, 2010.
- [85] B.N.J. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino, AI Volokitin, and E. Tosatti. On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 17:R1, 2005.
- [86] B.N.J. Persson, F. Bucher, and B. Chiaia. Elastic contact between randomly rough surfaces: Comparison of theory with numerical results. *Physical Review B*, 65(18):184106, 2002.
- [87] B.N.J. Persson, B. Lorenz, and A.I. Volokitin. Heat transfer between elastic solids with randomly rough surfaces. *The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics*, 31(1):3–24, 2010.
- [88] G.M. Pharr, W.C. Oliver, F.R. Brotzen, et al. On the Generality of the Relationship Among Contact Stiffness, Contact Area, and Elastic Modulus During Indentation. *Journal of Materials Research*, 7(3):613–617, 1992.
- [89] G.Ia. Popov. The contact problem of the theory of elasticity for the case of a circular area of contact. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 26:207–225, 1962.
- [90] V.L. Popov. *Kontaktmechanik und Reibung: Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation*. Springer, 2009.

- [91] V.L. Popov. *Kontaktmechanik und Reibung: Von der Nanotribologie bis zur Erdbebendynamik, 2. Auflage*. Springer, 2010.
- [92] V.L. Popov and A.E. Filippov. Method of movable lattice particles. *Tribology International*, 40(6):930–936, 2007.
- [93] V.L. Popov and S.G. Psakhie. Theoretical principles of modelling elastoplastic media by movable cellular automata method. I. Homogeneous media. *Physical Mesomechanics*, 4(1):15–25, 2001.
- [94] V.L. Popov and S.G. Psakhie. Numerical simulation methods in tribology. *Tribology International*, 40(6):916–923, 2007.
- [95] V.L. Popov, S.G. Psakhie, E.V. Shilko, A.I. Dmitriev, K. Knothe, F. Bucher, and M. Ertz. Friction coefficient in rail-wheel contacts as a function of material and loading parameters. *Physical Mesomechanics*, 5(3/4):17–24, 2002.
- [96] S.G. Psakhie, Y. Horie, G.-P. Ostermeyer, S.Y. Korostelev, A.Y. Smolin, E.V. Shilko, A.I. Dmitriev, S. Blatnik, et al. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 37(1-3):311–334, 2001.
- [97] J.R.M. Radok, Brown University. Division of Applied Mathematics, and United States. Office of Naval Research. *Visco-elastic stress analysis*. Division of Applied Mathematics, Brown University, 1956.
- [98] K.A. Reckling. *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*. Springer-Verlag, 1967.
- [99] M. Schargott, V.L. Popov, and S. Gorb. Spring model of biological attachment pads. *Journal of theoretical biology*, 243(1):48–53, 2006.
- [100] M. Schargott, V.L. Popov, and M. Heß. Macroscopic isotropy of two- and three-dimensional elastic lattice models. *Tribology International*, 40(6):937–941, 2007.
- [101] M. Scherge and S.N. Gorb. *Biological micro- and nanotribology: nature's solutions*. Springer Verlag, 2001.
- [102] E. Schlangen and E.J. Garboczi. Fracture simulations of concrete using lattice models: computational aspects. *Engineering Fracture Mechanics*, 57(2-3):319–332, 1997.
- [103] C.M. Segedin. The relation between load and penetration for a spherical punch. *Mathematica*, 4:156–161, 1957.
- [104] A.P.S. Selvadurai. The analytical method in geomechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 60:87, 2007.
- [105] I.N. Sneddon. *Fourier Transforms, 1951*. McGraw-Hill, New York.
- [106] I.N. Sneddon. Boussinesq's problem for a rigid cone. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 44, 1948.
- [107] I.N. Sneddon. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *Int. J. Eng. Sci.*, 3(1):47–57, 1965.
- [108] I.N. Sneddon. *The use of integral transforms*. McGraw-Hill New York, 1972.

- [109] I.N. Sneddon. *Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity*. Springer Wien, 1975.
- [110] Y. Sohn and S. Krishnaswamy. Mass spring lattice modeling of the scanning laser source technique. *Ultrasonics*, 39(8):543–551, 2002.
- [111] R. Spolenak, S. Gorb, H. Gao, and E. Arzt. Effects of contact shape on the scaling of biological attachments. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2054):305–319, 2005.
- [112] R.F. Stark and J.R. Booker. Surface displacements of a non-homogeneous elastic half-space subjected to uniform surface tractions. Part II: loading on rectangular shaped areas. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 21(6):379–395, 1998.
- [113] E. Steuermann. To Hertz’s theory of local deformations in compressed elastic bodies. In *CR (Dokl.) Acad. Sci. URSS*, volume 25, pages 359–361, 1939.
- [114] K. Terazawa. On the elastic equilibrium of a semi-infinite solid under given boundary conditions. *Tokyo J. Coll. Sci*, 37, 1916.
- [115] Y. Tian, N. Pesika, H. Zeng, K. Rosenberg, B. Zhao, P. McGuiggan, K. Autumn, and J. Israelachvili. Adhesion and friction in gecko toe attachment and detachment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(51):19320, 2006.
- [116] E.C. Titchmarsh. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Oxford, 1937.
- [117] C.D. Wang, C.S. Tzeng, E. Pan, and J.J. Liao. Displacements and stresses due to a vertical point load in an inhomogeneous transversely isotropic half-space. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40(5):667–685, 2003.
- [118] G.N. Watson. *Theory of Bessel functions*. Cambridge University Press Cambridge, 1944.
- [119] C. Weber. Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern. *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 5(6), 1925.
- [120] C. Weber. Zur Umwandlung von rotationssymmetrischen Problemen in zweidimensionale und umgekehrt. *Z. angew. Math. Mech.*, 20:117,118, 1940.
- [121] D.A. Wolf-Gladrow. *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction*. Springer Verlag, 2000.
- [122] C. Yang. *Role of surface roughness in tribology: from atomic to macroscopic scale*. Forschungszentrum Jülich, 2008.
- [123] C. Yang and B.N.J. Persson. Molecular dynamics study of contact mechanics: contact area and interfacial separation from small to full contact. *Physical review letters*, 100(2):24303, 2008.
- [124] C. Yang, U. Tartaglino, and B.N.J. Persson. A multiscale molecular dynamics approach to contact mechanics. *The European Physical Journal E*, 19(1):47–58, 2006.
- [125] H. Yao and H. Gao. Mechanics of robust and releasable adhesion in biology: Bottom-up designed hierarchical structures of gecko. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(6):1120–1146, 2006.

- [126] H. Yao and H. Gao. Optimal shapes for adhesive binding between two elastic bodies. *Journal of colloid and interface science*, 298(2):564–572, 2006.
- [127] H. Yim and Y. Sohn. Numerical simulation and visualization of elastic waves using mass-spring lattice model. *ieee transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 47(3):549, 2000.

